PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

25 MARCA 2017

CZAS PRACY: 180 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Wyrażenie $\frac{(n+2)!\cdot(n-1)!}{(n+1)!\cdot n!}$ dla liczby naturalnej $n \geqslant 1$ jest równe

A) n^2+n-2 B) $(n^2-4)(n^2-1)$ C) $\frac{n^2+n-2}{n^2+n}$ D) $\frac{n+2}{n}$

ZADANIE 2 (1 PKT)

Wartość wyrażenia $\sin^2 105^\circ - \cos^2 105^\circ$ jest równa

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ZADANIE 3 (1 PKT)

Ile jest liczb naturalnych dwudziestocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 25?

A) 380 B) 190 C) 250 D) 500

ZADANIE 4 (1 PKT)

Pochodna $f'(x)$ funkcji $f(x)=\frac{8x^3+4x^2+2}{8x^3+4x^2+3}$ jest określona wzorem

A) $\frac{24x^2+8x}{(8x^3+4x^2+3)^2}$ B) $\frac{-1}{(8x^3+4x^2+3)^2}$ C) $\frac{8x-24x^2}{(8x^3+4x^2+3)^2}$ D) $\frac{1}{(8x^3+4x^2+3)^2}$

ZADANIE 5 (1 PKT)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\begin{cases} 2^{|3-x|} & \text{dla } |x| \leqslant 4 \\ \log(|x|-4) & \text{dla } |x|>4 \end{cases}$

Równanie $f(x)=4$ ma dokładnie

A) jedno rozwiązanie. B) dwa rozwiązania. C) trzy rozwiązania. D) cztery rozwiązania.

Zadanie 6 (2 pkt)

Dane są zdarzenia losowe $A, B \subseteq \Omega$ takie, że $P(B) = \frac{3}{7}$ i $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz $P(A \setminus B)$, gdzie zdarzenie $A \setminus B$ oznacza różnicę zdarzeń A i B.

Zadanie 7 (2 pkt)

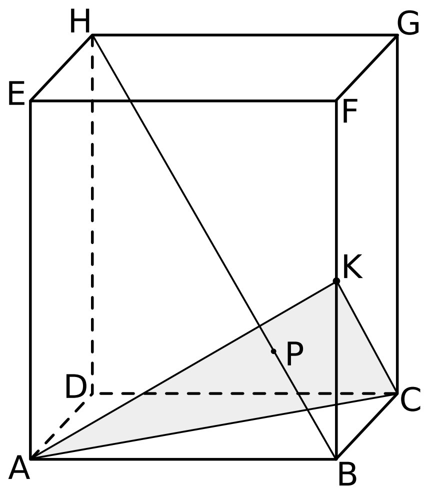
Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\log(3-x)}{2^x}$.

ZADANIE 8 (2 PKT)

W każdej z dwóch szuflad jest tyle samo rękawiczek prawych i lewych, a trzecia szuflada jest pusta. Z każdej z dwóch pierwszych szuflad losujemy jedną rękawiczkę i wkładamy je do trzeciej szuflady. Następnie z trzeciej szuflady losujemy jedną rękawiczkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rękawiczka wylosowana z trzeciej szuflady jest lewa.

ZADANIE 9 (3 PKT)

Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$. Przez wierzchołki A i C oraz środek K krawędzi BF poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną BH w punkcie P (zobacz rysunek).



Oblicz $|HP| : |HB|$.

ZADANIE 10 (3 PKT)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y takich, że $(x-1)^2+(y+2)^2=2$, prawdziwa jest nierówność $y+1 \leqslant x$.

ZADANIE 11 (3 PKT)

Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geqslant 1$ i spełnia warunki

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ 2a_{n+2} = a_n & \text{dla } n \geqslant 1 \\ 2\sqrt{2}a_{n+3} + a_n = 0 & \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

ZADANIE 12 (4 PKT)

Rozwiąż nierówność $\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{\sin^2 x} \leqslant 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

ZADANIE 13 (4 PKT)

W trójkącie prostokątnym stosunek sumy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{5}{4}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

ZADANIE 14 (4 PKT)

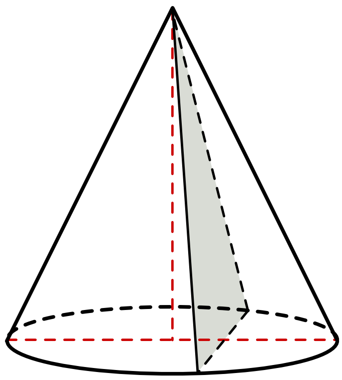
Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie

$$x^2 + y^2 + 6mx - 4y + 10m^2 - 4m + 2 = 0$$

opisuje okrąg. Jaka jest największa możliwa długość tego okręgu?

ZADANIE 15 (6 PKT)

W stożku o promieniu podstawy r tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przez wierzchołek stożka poprowadzono płaszczyznę, która jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\beta > \alpha$.



Wykaż, że pole otrzymanego przekroju stożka jest równe

$$\frac{r^2 \operatorname{tg}\alpha \sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{\cos\alpha \sin^2\beta}.$$

ZADANIE 16 (5 PKT)

Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, które tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy -2. Oblicz współczynniki a, b i c wiedząc, że $W(-3) = -48$.

ZADANIE 17 (7 PKT)

W metalowym ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości H i krawędzi podstawy a wydrążono otwór w kształcie walca, którego oś symetrii pokrywa się z osią symetrii ostrosłupa (patrz rysunek). Otwór wydrążono przez podstawę ostrosłupa w ten sposób, że górna podstawa walca nie wystaje poza powierzchnię ostrosłupa. Jaka może być najmniejsza możliwa objętość otrzymanej w ten sposób bryły?