Model odpowiedzi i schemat oceniania do arkusza I

Za każdą czynność oznaczoną ■ uczeń otrzymuje 1 punkt.

Zadanie 1 (4 pkt)

■ Odczytanie i zapisanie danych z wykresu: 100, 105, 100, 102, 101.
■ Obliczenie mediany: Mediana jest równa 101.
■ Obliczenie średniej arytmetycznej:

Średnia arytmetyczna jest równa $\frac{508}{5} = 101,6.$

■ Obliczenie, na której z dwóch podanych sesji cena jednej akcji spółki X miała większą zmianę procentową w stosunku do sesji poprzedniej:
Na drugiej, bo;
– na drugiej sesji jest zmiana o $\frac{5}{100} = 5\%$ w stosunku do sesji pierwszej,

– na trzeciej sesji jest zmiana o $\frac{5}{105} = 4,76...\%$ w stosunku do sesji drugiej.

Zadanie 2 (3 pkt)

■ Zapisanie zbioru A w postaci przedziału liczbowego: $A = \langle -5; -1 \rangle$

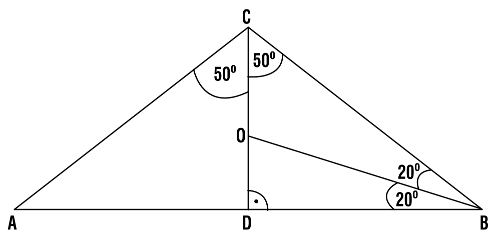
$$|x+3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x+3 \le 2 \Leftrightarrow -5 \le x \le -1 \Leftrightarrow x \in \langle -5; -1 \rangle$$

■ Zapisanie zbioru B w postaci przedziału liczbowego: $B = \langle -2; 2)$

$$\frac{2x}{2-x} \ge -1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} \le 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{2x-x+2}{x-2} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x-2) \le 0 \land x \ne 2 \Leftrightarrow x \in \langle -2; 2).$$

■ Zapisanie sumy $A \cup B$ w postaci przedziału liczbowego: $A \cup B = \langle -5; 2).$

Zadanie 3 (5 pkt)



■ Wprowadzenie oznaczeń (np. na rysunku pomocniczym) i napisanie wzoru na pole S trójkąta:

$$S = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = |DB| \cdot |CD|.$$

■ Obliczenie miar kątów DBC i DBO:

$$|\sphericalangle DCB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle ACB| = 50^\circ, |\sphericalangle DBC| = 40^\circ, |\sphericalangle DBO| = \frac{1}{2} \sphericalangle |DBC| = 20^\circ$$

■ Obliczenie długości odcinka *DB*:

$|DB| = 5 \cdot \text{ctg } 20^\circ.$

(korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym *ODB*).

■ Obliczenie długości odcinka *DC*:

$|DC| = |DB| \cdot \text{tg} 40^\circ = 5 \cdot \text{ctg } 20^\circ \cdot \text{tg} 40^\circ.$

(korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym *CDB*).

■ Obliczenie pola *S* trójkąta *ABC* i podanie wyniku z wymaganą dokładnością:

$S = 25 \cdot \text{ctg}^2 20^\circ \cdot \text{tg} 40^\circ = 158{,}4 \text{ cm}^2.$

Zadanie 4 (7 pkt)

■ Napisanie równania prostej *l*: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$

Na przykład z wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty;

$y - 3 = \frac{-2+3}{-1+3} \cdot (x+3)$, stąd $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

■ Obliczenie współrzędnych punktu *A*: $A = (3,0)$.
W równaniu prostej *l* podstawiamy $y = 0$.

■ Obliczenie współrzędnych punktu *B*: $B = \left(0, -\frac{3}{2}\right).$

W równaniu prostej *l* podstawiamy $x = 0$.

■ Obliczenie pola *S* trójkąta *AOB*: $S = \frac{9}{4}.$

Trójkąt *AOB* jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym *AOB*, zatem

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |BO| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

■ Obliczenie długości odcinka *AB*: $|AB| = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$

$$|AB| = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 5}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

■ Obliczenie pola S_k koła opisanego na trójkącie AOB: $S_k = \frac{45}{16}\pi$.

Promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie długości przeciwprostokątnej AB, zatem

$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{3}{4}\sqrt{5}$. $S_k = \pi R^2 = \frac{9\cdot 5}{16}\pi = \frac{45}{16}\pi$.

■ Opisanie za pomocą nierówności półpłaszczyzny, której krawędzią jest prosta l i do której

należy punkt C: $y \geq \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

$C = (-10, -6)$, to $-6 > \frac{1}{2}\cdot(-10) - \frac{3}{2}$.

Zadanie 5 (3 pkt)

■ Obliczenie współrzędnych punktu P:

$P = (0,6) \in k$

■ Zapisanie równania prostej we wskazanej postaci:
k: $4x - y - 11 = 0$.

■ Obliczenie odległości między prostymi k i l:

$$d(P,k) = \frac{|4\cdot 0 - 1\cdot 6 - 11|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{|-17|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}.$$

Zadanie 6 (6 pkt)

■ Obliczenie drugiego miejsca zerowego funkcji f: $x = -3$
Wykorzystanie faktu, że prosta o równaniu $x = -2$ jest osią symetrii paraboli, i wskazanie drugiego miejsca zerowego funkcji f:
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej są symetryczne względem osi symetrii paraboli, zatem drugim miejscem zerowym funkcji f jest $x = -3$.

■ Napisanie wzoru określającego funkcję f: $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 2$.

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe, więc jej wzór można zapisać w postaci iloczynowej,

$f(x) = a(x+3)(x+1)$. Ponieważ $f(0) = 2$, to $= a(0+3)(0+1) = 2$ stąd $a = \frac{2}{3}$
i $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 2$.

■ Przekształcenie równania $3\cdot f(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 4$ do postaci $x^3 + x - 2 = 0$

$$3\cdot\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 2\right) = x^3 + 2x^2 + 9x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 6 = x^3 + 2x^2 + 9x + 4 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0.$$

■ Sprawdzenie, że liczba 1 jest pierwiastkiem równania $x^3 + x - 2 = 0$
■ Podzielenie $x^3 + x - 2$ przez dwumian $x - 1$ i zapisanie $x^3 + x - 2$ w postaci iloczynowej
$(x^3+x-2):(x-1)=(x^2+x+2)$
$(x^3+x-2)=(x^2+x+2)(x-1)$

■ Rozwiązanie równania $x^3 + x - 2 = 0$:
$$(x^2+x+2)(x-1)^2 \Leftrightarrow (x^2+x+2) = 0 \vee (x-1) = 0$$

Równanie $x^2 + x + 2 = 0$ nie ma rozwiązań, bo $\Delta = -7 < 0$.

Rozwiązaniem równania $x - 1 = 0$ jest $x = 1$.
Jedynym rozwiązaniem równania $x^3 + x - 2 = 0$ jest $x = 1$.

Zadanie 7 (4 pkt)

■ Wprowadzenie oznaczeń i napisanie założeń:

n: liczba boków pierwszego wielokąta, $n \geq 3$

$10 - n$: liczba boków drugiego wielokąta, $n \leq 7$

Z faktów, że $n \geq 3$ i $n \leq 7$ wynika, że $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$

■ Ułożenie równania, na przykład z wykorzystaniem wzoru na liczbę przekątnych wielokąta:

$$\frac{n(n-3)}{2} + \frac{(10-n)(10-n-3)}{2} = 14.$$

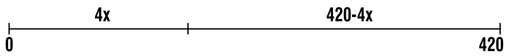
■ Rozwiązanie równania $\frac{n(n-3)}{2} + \frac{(10-n)(10-n-3)}{2} = 14$:

$n(n-3) + (10-n)(7-n) = 28$,
$n^2 - 3n + 70 - 17n + n^2 = 28$, czyli
$n^2 - 10n + 21 = 0$, stąd $n = 3$ lub $n = 7$

■ Podanie nazw wielokątów:
Trójkąt i siedmiokąt.

Zadanie 8 (5 pkt)

■ Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie warunków zadania:



x – długość boku kwadratu,
$4x$ – obwód kwadratu,
4,2m = 420 cm
$(420 - 4x)$ – obwód prostokąta,   – długości kolejnych boków prostokąta.
$(210 - 2x)$ – suma długości dwóch kolejnych boków prostokąta.
■ Zapisanie długości kolejnych boków prostokąta:

$$\frac{1}{4} \cdot (210 - 2x) = \frac{1}{2}(105 - x),$$
$$\frac{3}{4} \cdot (210 - 2x) = \frac{3}{2}(105 - x).$$

■ Określenie funkcji zmiennej x równej sumie pól kwadratu i prostokąta:

$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(105 - x^2\right) = x^2 + \frac{3}{4}\left(105^2 - 210x + x^2\right) =$

$= \frac{7}{4}x^2 - \frac{3}{2}\cdot 105x + \frac{3}{4}\cdot 105^2, \qquad D_f = (0;105).$

■ Wyznaczenie argumentu x_o, dla którego funkcja f przyjmuje wartość największą:

$x_0 = \frac{\frac{3}{2}\cdot 105}{2\cdot\frac{7}{4}} = 45,$ bo funkcja f jest funkcją kwadratową rozpatrywaną

w przedziale (0;105)

■ Sformułowanie odpowiedzi:
Odcinek należy podzielić na części o długościach:
4 · 45 cm = 180 cm = 1,8 m oraz 2,4 m.

Zadanie 9 (4 pkt)

■ Określenie zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych Ω i obliczenie jego mocy.

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie elementy zbioru {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Ω jest zbiorem skończonym i zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne,

spełnione są zatem założenia twierdzenia „klasyczna definicja prawdopodobieństwa”.
$|\Omega| = 9.$

■ Określenie zdarzenia A i obliczenie jego mocy:
A – liczby 3, 5, k spełniają nierówności trójkąta.
■ Wyznaczenie i obliczenie mocy zdarzenia A, czyli ułożenie i rozwiązanie układu nierówności:
stąd czyli

$\begin{cases} 3+5>k \\ 3+k>5 \\ 5+k>3 \end{cases}$ stąd $\begin{cases} k<8 \\ k>2 \\ k>-2 \end{cases}$ czyli

$k \in \{3,4,5,6,7\}. \qquad |A| = 5.$

■ Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A:

$P(A) = \frac{5}{9}.$

Zadanie 10 (5 pkt)

■ Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie danych:
(a_n) ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r.

$P(A\cap B) = a_1,\ P(A) = a_1 + 2r,\ P(B) = a_1 + 3r.$

■ Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa i ułożenie układu równań:

$\begin{cases} P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \\ P(B\setminus A) = P(B) - P(A\cap B) \end{cases}$

■ Podstawienie danych i rozwiązanie układu równań:

$\begin{cases} 0{,}65 = a_1 + 2r + a_1 + 3r - a_1 \\ 0{,}3 = a_1 + 3r - a_1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 0,65 = a_1 + 5r \\ 0,3 = 3r \end{cases}$$

stąd $a_1 = 0,15$, $r = 0,1$.

■ Obliczenie $P(A \cap B), P(A), P(B)$:

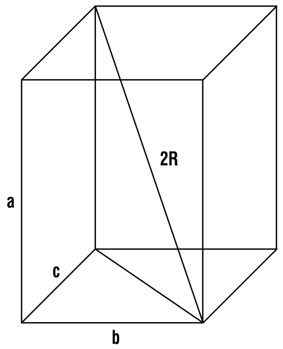
$$P(A \cap B) = 0,15,\ P(A) = 0,15 + 0,2 = 0,35,\ P(B) = 0,15 + 0,3 = 0,45.$$

■ Obliczenie $P(A' \cup B)$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = 0,8.$$

Zadanie 11 (4 pkt)

■ Sporządzenie rysunku pomocniczego, wprowadzenie oznaczeń i zapisanie danych:



$$a = x,\ b = \frac{x}{2},\ c = \frac{x}{4}. \quad R = 3\sqrt{21}.$$

■ Zauważenie, że podwojony promień kuli opisanej na prostopadłościanie jest równy długości przekątnej prostopadłościanu i ułożenie równania:

$$2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \text{czyli} \quad 6\sqrt{21} = \sqrt{(x)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{21}{16}x^2}$$

■ Rozwiązanie równania i podanie wymiarów prostopadłościanu:

$$36 \cdot 21 = \frac{21}{16}x^2 \quad \text{i} \quad x > 0 \quad \text{stąd } x = 24.$$

Zatem $a = 24$, $b = 12$, $c = 6$.

■ Obliczenie objętości prostopadłościanu:

$$V = 24 \cdot 12 \cdot 6 = 1728.$$

Uwaga! Każde inne od zaproponowanego w modelu odpowiedzi poprawne rozwiązanie ocenia się na maksymalną dla tego zadania liczbę punktów