CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015

FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA")

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1

CZERWIEC 2015

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 1. ***(6 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+2(m-1)x+m^2+m-1=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)<x_1^3+x_2^3$.

Rozwiązanie

Zapisujemy układ warunków

$$\begin{cases}\Delta>0\\(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)<x_1^3+x_2^3\end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$, czyli $4(m-1)^2-4(m^2+m-1)>0$. Przekształcamy w sposób równoważny tę nierówność do postaci $-3m+2>0$ i stąd otrzymujemy rozwiązanie: $m<\frac{2}{3}$.

Przekształcamy w sposób równoważny nierówność $(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)<x_1^3+x_2^3$ do postaci $x_1^3+x_1x_2^2+x_2x_1^2+x_2^3<x_1^3+x_2^3$, następnie $x_1x_2^2+x_2x_1^2<0$, a stąd $x_1x_2(x_1+x_2)<0$.

Uwaga

Daną nierówność możemy przekształcić w inny sposób:

$$(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)<x_1^3+x_2^3$$

$$(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)<(x_1+x_2)\cdot(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$$

$$(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1^2+x_1x_2-x_2^2)<0$$

$$x_1x_2(x_1+x_2)<0.$$

Wykorzystując wzory Viete'a otrzymujemy nierówność

$$-2(m^2+m-1)(m-1)<0,$$

a następnie

$$-2\left(m-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(m-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)(m-1)<0.$$

Stąd otrzymujemy $m\in\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

Stąd i z poprzedniego warunku otrzymujemy rozwiązanie zadania $m\in\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.
Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga
Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za ten etap otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) < x_1^3 + x_2^3$. Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **4 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
- Za zapisanie nierówności w postaci $x_1 x_2 (x_1 + x_2) < 0$ zdający otrzymuje **1 punkt**.
- Za zapisanie nierówności w postaci $-2(m^2 + m - 1)(m-1) < 0$ zdający otrzymuje **2 punkty**.
- Za zapisanie nierówności w postaci $-2\left(m - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(m - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)(m-1) < 0$ zdający otrzymuje **3 punkty**.
- Za rozwiązanie tej nierówności $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ zdający otrzymuje **4 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego.
Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **1 punkt**.
Odpowiedź: $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Uwaga
1. W przypadku rozwiązania z usterkami, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże nierówność z etapu II.
2. Jeżeli zdający obie strony nierówności $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) < (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$ lub $x_1 x_2 (x_1 + x_2) < 0$ podzieli bez uzasadnienia przez $x_1 + x_2$ i rozwiąże zadanie do końca, to za rozwiązanie zadania otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Funkcja f jest określona wzorem $f\left(x\right)=\frac{x-2}{x}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $x\neq 0$. Rozwiąż nierówność $\left|\left|f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right|-3\right|\leq 4$.

Rozwiązanie

Ponieważ $f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{\frac{1}{x+1}-2}{\frac{1}{x+1}}=1-2\left(x+1\right)=-2x-1$ dla każdego $x\neq -1$, więc nierówność $\left|\left|f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right|-3\right|\leq 4$ możemy zapisać w postaci $\left|\left|-2x-1\right|-3\right|\leq 4$. Stąd

$$\left|-2x-1\right|-3\leq 4 \quad \text{i} \quad \left|-2x-1\right|-3\geq -4,$$
$$\left|-2x-1\right|\leq 7 \quad \text{i} \quad \left|-2x-1\right|\geq -1.$$

Druga z otrzymanych nierówności jest prawdziwa dla każdej liczby $x\neq -1$, a pierwszą spełniają takie liczby x, że

$$-2x-1\leq 7 \quad \text{i} \quad -2x-1\geq -7.$$

Skąd $x\in\left\langle -4,3\right\rangle$.

Uwzględniając założenie $x\neq -1$, otrzymujemy ostatecznie $x\in\left\langle -4,-1\right)\cup\left(-1,3\right\rangle$.

Odpowiedź: $x\in\left\langle -4,-1\right)\cup\left(-1,3\right\rangle$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.
Zdający

- wyznaczy $f\left(\frac{1}{x+1}\right)=-2x-1$ dla $x\neq -1$

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej: $\left|f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right|\leq 7$ i $\left|f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right|\geq -1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze koniunkcję nierówności: $\left|-2x-1\right|\leq 7$ i $\left|-2x-1\right|\geq -1$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 3 p.

Zdający rozwiąże koniunkcję nierówności: $x\in\left\langle -4,3\right\rangle$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności $\left|\left|f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right|-3\right|\leq 4$: $x\in\left\langle -4,-1\right)\cup\left(-1,3\right\rangle$.

Zadanie 3. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie

Ponieważ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, to równanie $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0,$$
$$\sin x\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0.$$

Stąd

$$\sin x = 0 \text{ lub } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ równanie $\sin x = 0$ ma trzy rozwiązania: $x = 0$ lub $x = \pi$ lub $x = 2\pi$.

Równanie $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $x = \frac{5}{6}\pi$ lub $x = \frac{7}{6}\pi$.

Zatem równanie $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ pięć rozwiązań: $x = 0$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = 2\pi$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 p.

Zdający zapisze równanie w zależności od funkcji trygonometrycznych tego samego argumentu, np.: $2\sin x\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$ i na tym zakończy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 p.

Zdający zapisze alternatywę $\sin x = 0$ lub $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne ....3 p.

Zdający

- rozwiąże równanie $\sin x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$

albo

- rozwiąże równanie $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{5}{6}\pi$ lub $x = \frac{7}{6}\pi$.

albo

- rozwiąże oba równania $\sin x = 0$ oraz $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych: $x = k\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi + 2l\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi + 2m\pi$, gdzie k, l, m to liczby całkowite.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

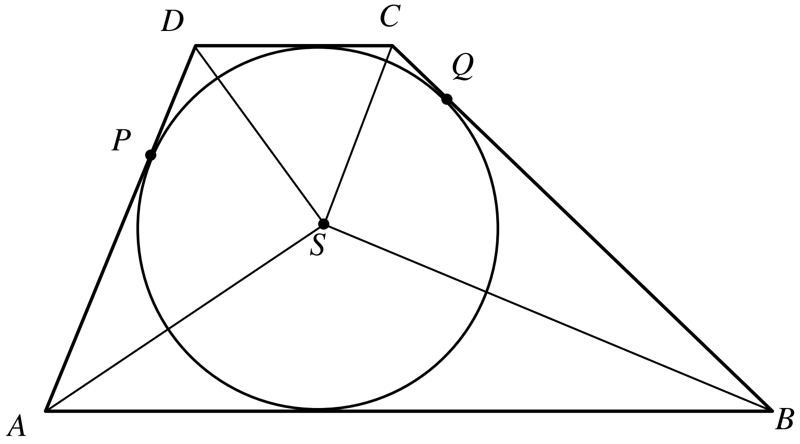
Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = 0$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = 2\pi$ (albo $x = 0°$, $x = 150°$, $x = 180°$, $x = 210°$, $x = 360°$)

Uwaga

Jeżeli zdający dzieli stronami równanie $2\sin x\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$ przez $\sin x$ bez rozpatrzenia dwóch przypadków i poprawnie rozwiąże równanie $2\cos x + \sqrt{3} = 0$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **2 punkty**.

Zadanie 4. ***(3 pkt)***

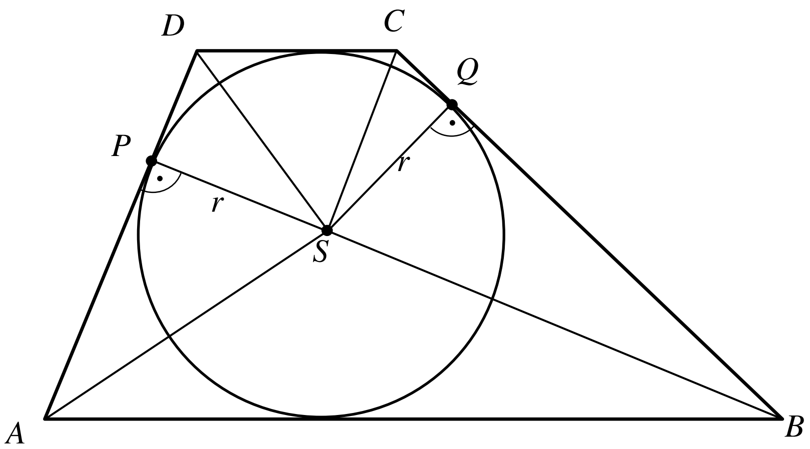
W trapez $ABCD$ wpisano okrąg o środku S. Okrąg ten jest styczny do ramion AD i BC tego trapezu w punktach odpowiednio P i Q (zobacz rysunek).



Uzasadnij, że trójkąt ASD jest prostokątny. Wykaż, że $|AP|\cdot|DP|=|BQ|\cdot|CQ|$.

<u>Rozwiązanie</u>

Oznaczmy przez r promień danego okręgu.



Suma kątów przy ramieniu trapezu jest równa $180°$, czyli

$$|\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle CDA|=180° \text{ oraz } |\sphericalangle ABC|+|\sphericalangle DCB|=180°.$$

Środek okręgu wpisanego w trapez leży na dwusiecznych kątów BAD i CDA, więc

$$|\sphericalangle SAD|+|\sphericalangle SDA|=\frac{1}{2}|\sphericalangle BAD|+\frac{1}{2}|\sphericalangle CDA|=\frac{1}{2}\cdot 180°=90°.$$

Zatem $|\sphericalangle ASD|=180°-\left(|\sphericalangle SAD|+|\sphericalangle SDA|\right)=180°-90°=90°$, czyli trójkąt ASD jest prostokątny. Tak samo uzasadniamy, że trójkąt BSC jest prostokątny.

W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na jakie spodek tej wysokości dzieli przeciwprostokątną. Zatem $|AP|\cdot|DP|=r^2$ oraz $|BQ|\cdot|CQ|=r^2$.

Stąd $|AP|\cdot|DP|=|BQ|\cdot|CQ|$, co kończy dowód.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy uzasadni, że trójkąt ASD jest prostokątny.

Zdający otrzymuje..**2 p.**
gdy zapisze jedną z równości wynikającą z twierdzenia o podziale przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego spodkiem wysokości: $|AP|\cdot|DP|=r^2$ lub $|BQ|\cdot|CQ|=r^2$.

Zdający otrzymuje..**3 p.**
gdy uzasadni, że trójkąt ASD jest prostokątny, zapisze, że trójkąt BSC jest prostokątny oraz wykaże równość $|AP|\cdot|DP|=|BQ|\cdot|CQ|$.

Zadanie 5. *(3 pkt)*
Wykaż, że dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby a i dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby b spełniona jest równość

$$\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}+\ldots+\frac{1}{\log_{a^9} b}+\frac{1}{\log_{a^{10}} b}=\frac{55}{\log_a b}.$$

<u>**I sposób rozwiązania**</u>
Stosując wzór na zamianę podstaw logarytmu otrzymujemy:

$$\frac{1}{\log_a b}=\log_b a,\ \frac{1}{\log_{a^2} b}=\log_b a^2,\ \ldots,\ \frac{1}{\log_{a^{10}} b}=\log_b a^{10}.$$

Stąd i ze wzoru na logarytm potęgi lewą stronę równości możemy zapisać w postaci

$$\log_b a+2\log_b a+\ldots+10\log_b a.$$

Lewa strona równości jest więc równa

$$(1+2+\ldots+10)\log_b a=55\log_b a=\frac{55}{\log_a b}.$$

To kończy dowód.

<u>**II sposób rozwiązania**</u>
Wykorzystujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu. Możemy zapisać, że $\log_{a^2} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^2}=\frac{\log_a b}{2}$, $\log_{a^3} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^3}=\frac{\log_a b}{3}$, … , $\log_{a^{10}} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^{10}}=\frac{\log_a b}{10}$

Zauważamy, że przy podanych założeniach $\log_a b\neq 0$ i mnożymy obie strony równania przez $\log_a b$.

Wówczas otrzymujemy: $1+\frac{\log_a b}{\frac{\log_a b}{2}}+\frac{\log_a b}{\frac{\log_a b}{3}}+\ldots+\frac{\log_a b}{\frac{\log_a b}{10}}=55$.

Po przekształceniu otrzymujemy: $1+2+3+\ldots+10=55$, co kończy dowód.

<u>**Schemat oceniania rozwiązania**</u>
Zdający otrzymuje ....**1 p.**
gdy zastosuje wzór na zamianę podstaw logarytmu i zapisze:

- $\frac{1}{\log_a b}=\log_b a$, $\frac{1}{\log_{a^2} b}=\log_b a^2$, … , $\frac{1}{\log_{a^{10}} b}=\log_b a^{10}$

albo

- $\log_{a^2} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^2}=\frac{\log_a b}{2}$, $\log_{a^3} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^3}=\frac{\log_a b}{3}$, … , $\log_{a^{10}} b=\frac{\log_a b}{\log_a a^{10}}=\frac{\log_a b}{10}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przedstawi lewą stronę równości w postaci: $\log_b a + 2\log_b a + \ldots + 10\log_b a$ lub

$1 + \frac{\log_a b}{\frac{\log_a b}{2}} + \frac{\log_a b}{\frac{\log_a b}{3}} + \ldots + \frac{\log_a b}{\frac{\log_a b}{10}} = 55$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

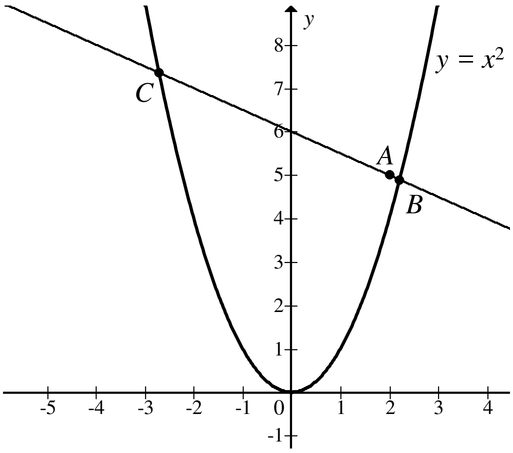
Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy przedstawi kompletny dowód podanej równości.

Zadanie 6. ***(5 pkt)***

Prosta *l*, na której leży punkt $A=(2,5)$, przecina parabolę o równaniu $y=x^2$ w dwóch różnych punktach $B=(x_1,y_1)$ i $C=(x_2,y_2)$. Oblicz wartość współczynnika kierunkowego prostej *l*, przy której suma y_1+y_2 osiągnie wartość najmniejszą.

Rozwiązanie

Wyznaczamy równanie rodziny prostych przechodzących przez punkt *A*. Niech a oznacza współczynnik kierunkowy dowolnej prostej l tej rodziny, zatem jej równanie przyjmuje postać: $y-5=a(x-2)$, czyli $y=ax-2a+5$. Prosta o równaniu $x=2$ nie spełnia warunków zadania, gdyż przecina parabolę o równaniu $y=x^2$ tylko w jednym punkcie.



Współrzędne punktów *B* i *C* to rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=ax-2a+5 \end{cases},$$

z którego otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą x

$$x^2-ax+2a-5=0.$$

Dla każdej wartości a równanie to ma dwa rozwiązania (każda z prostych opisanych równanie $y-5=a(x-2)$ przecina parabolę w dwóch punktach o różnych odciętych).

Z tego, że punkty *B* i *C* leżą na paraboli wnioskujemy, że: $y_1=x_1^2$ i $y_2=x_2^2$. Zatem

$$y_1+y_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Ze wzorów Viète'a możemy tę sumę zapisać w postaci

$$y_1+y_2=\left(-\tfrac{-a}{1}\right)^2-2\cdot\tfrac{2a-5}{1}=a^2-4a+10.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób funkcję określoną wzorem

$$f(a)=a^2-4a+10$$

dla każdej liczby rzeczywistej a.

Funkcja f jest kwadratowa, współczynnik przy a^2 jest dodatni, więc przyjmuje ona wartość najmniejszą dla $a=\dfrac{-(-4)}{2\cdot 1}=2$.

Odpowiedź. Wyrażenie y_1+y_2 przyjmuje najmniejszą wartość, gdy współczynnik kierunkowy prostej *l* jest równy 2.

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze równanie rodziny prostych przechodzących przez punkt A i przecinających parabolę $y = x^2$ w punktach B i C: $y - 5 = a(x - 2)$ lub $y = ax - 2a + 5$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze układ równań $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax - 2a + 5 \end{cases}$.

<u>**Uwaga**</u>

Jeżeli zdający zapisze równanie $x^2 - ax + 2a - 5 = 0$, to otrzymuje **3 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający wykorzysta wzory Viète'a i zapisze wyrażenie $y_1 + y_2$ jako funkcję zmiennej a: $f(a) = a^2 - 4a + 10$.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy a, dla którego wyrażenie $y_1 + y_2$ przyjmuje wartość najmniejszą: $a = 2$.

Zadanie 7. ***(6 pkt)***

Trzy liczby, których suma jest równa 105, są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Pierwsza z tych liczb jest jednocześnie pierwszym, druga szóstym, a trzecia dwudziestym szóstym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz te liczby.

I sposób rozwiązania

Niech a, b i c oznaczają odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią z szukanych liczb. Suma tych liczb jest równa 105, czyli
$$a+b+c=105.$$
Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie
$$b^2=ac.$$
Niech (d_n) będzie ciągiem arytmetycznym, w którym $d_1=a$, $d_6=b$, $d_{26}=c$.

Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy
$$b=d_6=a+5r,\ c=d_{26}=a+25r.$$
Otrzymaliśmy zatem układ równań
$$\begin{cases} a+(a+5r)+(a+25r)=105 \\ (a+5r)^2=a\cdot(a+25r) \end{cases}.$$
Pierwsze równanie przekształcamy równoważnie i otrzymujemy
$$3a+30r=105,$$
$$a+10r=35,$$
$$a=35-10r.$$
Zatem drugie równanie możemy zapisać w postaci
$$((35-10r)+5r)^2=(35-10r)\cdot((35-10r)+25r),$$
$$(35-5r)^2=(35-10r)\cdot(35+15r),$$
$$5^2(7-r)^2=5(7-2r)\cdot5(7+3r),$$
$$(7-r)^2=(7-2r)(7+3r),$$
$$49-14r+r^2=49+21r-14r-6r^2,$$
$$7r^2-21r=0,$$
$$7r(r-3)=0.$$
Stąd wynika, że $r=0$ lub $r=3$.

Gdy $r=0$, to $a=35$, $b=a+5r=35$ oraz $c=a+25r=35$. Zatem ciąg jest stały.

Gdy $r=3$ to $a=5$, $b=5+5\cdot3=20$ oraz $c=5+25\cdot3=80$.

Odpowiedź: Jest jedna trójka takich liczb: $(5,\ 20,\ 80)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zapisze równanie wynikające z własności ciągu geometrycznego (a,b,c), np.: $b^2=ac$

albo

- zapisze liczby a, b i c w zależności od różnicy ciągu arytmetycznego (d_n), np.:
  $a=d_1$, $b=d_1+5r$, $c=d_1+25r$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze równanie wynikające z własności ciągu geometrycznego (a,b,c), np.:
$b^2 = ac$ oraz zapisze zależności między liczbami a, b i c oraz różnicy r ciągu arytmetycznego (d_n), np.: $a = d_1$, $b = d_1 + 5r$, $c = d_1 + 25r$.

Uwaga
Jeżeli zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć a i r, np.:
$$\begin{cases} a+(a+5r)+(a+25r)=105 \\ (a+5r)^2 = a\cdot(a+25r) \end{cases},$$
to otrzymuje **3 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:
$$((35-10r)+5r)^2 = (35-10r)\cdot((35-10r)+25r).$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).. 5 p.
Zdający
- zapisze równanie z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej i na tym zakończy, np.: $7r^2 - 21r = 0$

albo
- rozwiąże zadanie do końca i nie odrzuci przypadku ciągu stałego, czyli $r = 0$

albo
- rozwiąże zadanie do końca, ale w trakcie rozwiązywania zadania popełni błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.
Zdający wyznaczy szukaną trójkę liczb: $(5, 20, 80)$.

II sposób rozwiązania
Niech a, b i c oznaczają odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią z szukanych liczb, których suma jest równa 105, stąd
$$a+b+c=105.$$
Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie
$$b^2 = ac.$$
Wyrazy ciągu arytmetycznego (d_n), to: $d_1 = a$, $d_6 = b$, $d_{26} = c$.
Korzystając z definicji ciągu arytmetycznego otrzymujemy
$$a = d_1,\ b = d_6 = a+5r,\ c = d_{26} = a+25r.$$
Stąd otrzymujemy układ równań
$$\begin{cases} a+(a+5r)+(a+25r)=105 \\ (a+5r)^2 = a\cdot(a+25r) \end{cases}.$$
Pierwsze równanie przekształcamy równoważnie i otrzymujemy
$$3a+30r=105,$$
$$a+10r=35,$$
Drugie równanie możemy zapisać w postaci
$$(a+5r)^2 = a\cdot(a+25r),$$

$$a^2+10ar+25r^2=a^2+25ar,$$
$$25r^2-15ar=0,$$
$$5r(5r-3a)=0.$$

Stąd wynika, że $r=0$ lub $r=\frac{3}{5}a$.

Gdy $r=0$, to $a=35$, wtedy $b=35$ oraz $c=35$. Zatem wtedy ciąg jest stały.

Gdy $r=\frac{3}{5}a$ to $a+10\cdot\frac{3}{5}a=35$, wtedy $a=5$ oraz $r=3$. Zatem $b=5+3\cdot5=20$, $c=5+25\cdot3=80$.

Odpowiedź: Jest jedna trójka takich liczb: $(5,\ 20,\ 80)$.

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający
- zapisze równanie wynikające z własności ciągu geometrycznego (a,b,c), np.: $b^2=ac$

albo
- zapisze liczby *a*, *b* i *c* w zależności od różnicy ciągu arytmetycznego (d_n), np.: $a=d_1$, $b=d_1+5r$, $c=d_1+25r$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze równanie wynikające z własności ciągu geometrycznego (a,b,c), np.: $b^2=ac$ oraz zapisze zależności między liczbami *a*, *b* i *c* oraz różnicy *r* ciągu arytmetycznego (d_n), np.: $a=d_1$, $b=d_1+5r$, $c=d_1+25r$.

<u>**Uwaga**</u>

Jeżeli zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć a i r, np.:
$a+(a+5r)+(a+25r)=105$ i $(a+5r)^2=a\cdot(a+25r)$, to otrzymuje **3 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający zapisze
- równanie kwadratowe (nawet w postaci nieuporządkowanej) z jedną niewiadomą, np.: $(35-5r)^2=(35-10r)\cdot(35+15r)$

albo
- równanie pozwalające wyznaczyć *r*, np.: $25r^2-15ar=0$ oraz wywnioskuje, że $r=0$ lub $r=\frac{3}{5}a$

i na tym zakończy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 p.

Zdający
- rozwiąże zadanie do końca i nie odrzuci przypadku ciągu stałego, czyli $r=0$

albo
- rozwiąże zadanie do końca, ale w trakcie rozwiązywania zadania popełni błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

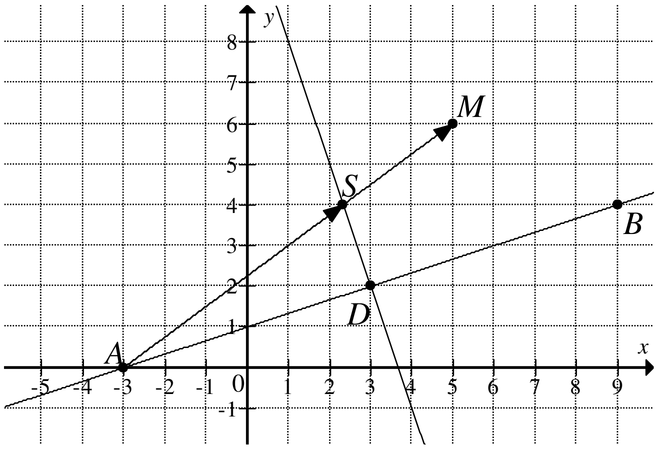
Zdający wyznaczy szukaną trójkę liczb: $(5,\ 20,\ 80)$.

Zadanie 8. ***(6 pkt)***

Punkt $M=(5,6)$ jest środkiem ramienia *BC* trójkąta równoramiennego *ABC*, w którym $|AC|=|BC|$. Podstawa *AB* tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu $y=\frac{1}{3}x+1$ oraz $A=(-3,0)$. Oblicz współrzędne wierzchołka *B* tego trójkąta.

I sposób rozwiązania

Odcinek *AM* jest środkową trójkąta *ABC*. Niech $S=(x_S, y_S)$ będzie środkiem ciężkości tego trójkąta.



Z twierdzenia o środku ciężkości trójkąta wynika, że $\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, czyli

$$[x_S+3, y_S]=\frac{2}{3}[5+3,6],$$

$$[x_S+3, y_S]=\left[\frac{16}{3},4\right],$$

$$x_S+3=\frac{16}{3} \text{ oraz } y_S=4$$

Stąd $x_S=\frac{7}{3}$ oraz $y_S=4$, czyli $S=\left(\frac{7}{3},4\right)$.

Ponieważ trójkąt *ABC* jest równoramienny i *AB* jest jego podstawą, więc prosta zawierająca środkową *CS* tego trójkąta jest jednocześnie symetralną podstawy *AB*. Jej równanie ma zatem postać

$$y=-3\left(x-\frac{7}{3}\right)+4,$$

$$y=-3x+11.$$

Rozwiązując układ równań $y=-3x+11$ i $y=\frac{1}{3}x+1$ obliczymy współrzędne środka *D* odcinka *AB*. Porównując prawe strony równań tych prostych mamy

$$\frac{1}{3}x+1=-3x+11,$$

$$\frac{10}{3}x=10,$$

$$x = 3.$$

Zatem $y = -3\cdot 3 + 11 = 2$, więc $D = (3,2)$.

Współrzędne środka *D* odcinka *AB* są równe

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ oraz } y_D = \frac{y_A + y_B}{2},$$

więc

$$3 = \frac{-3 + x_B}{2} \text{ oraz } 2 = \frac{0 + y_B}{2}.$$

Stąd $x_B = 9$ oraz $y_B = 4$, czyli $B = (9,4)$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Prosta *AM* ma równanie postaci $y = \frac{6-0}{5+3}(x+3)$, czyli $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

Środek ciężkości $S = (x_S, y_S)$ trójkąta *ABC* leży na prostej *AM*, więc $S = \left(x_S, \frac{3}{4}x_S + \frac{9}{4}\right)$ i $-3 < x_S < 5$. Z twierdzenia o środku ciężkości trójkąta wynika, że $|AS| = \frac{2}{3}|AM|$.

Stąd

$$\sqrt{(x_s+3)^2 + \left(\frac{3}{4}(x_s+3)\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{(5+3)^2 + (6-0)^2},$$

$$\sqrt{(x_s+3)^2 + \frac{9}{16}(x_s+3)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{8^2 + 6^2},$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}(x_s+3)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{100},$$

$$\frac{25}{16}(x_s+3)^2 = \frac{4}{9}\cdot 100,$$

$$(x_s+3)^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2,$$

$$x_s + 3 = -\frac{16}{3} \text{ lub } x_s + 3 = \frac{16}{3},$$

$$x_s = -8\frac{1}{3} \text{ lub } x_s = \frac{7}{3}.$$

Tylko drugie z tych rozwiązań spełnia warunek $-3 < x_S < 5$, więc $x_s = \frac{7}{3}$. Zatem

$$S = \left(\frac{7}{3}, \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\right) = \left(\frac{7}{3}, 4\right).$$

Ponieważ trójkąt *ABC* jest równoramienny i *AB* jest jego podstawą, więc prosta zawierająca środkową *CS* tego trójkąta jest jednocześnie symetralną podstawy *AB*. Jej równanie ma zatem postać

$$y = -3\left(x - \frac{7}{3}\right) + 4,$$

$$y = -3x + 11.$$

Rozwiązując układ równań $y=-3x+11$ i $y=\frac{1}{3}x+1$ obliczymy współrzędne środka D odcinka AB. Porównując prawe strony równań tych prostych mamy

$$\frac{1}{3}x+1=-3x+11,$$

$$\frac{10}{3}x=10,$$

$$x=3.$$

Zatem $y=-3\cdot 3+11=2$, więc $D=(3,2)$.

Współrzędne środka D odcinka AB są równe

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2} \text{ oraz } y_D=\frac{y_A+y_B}{2},$$

więc

$$3=\frac{-3+x_B}{2} \text{ oraz } 2=\frac{0+y_B}{2}.$$

Stąd $x_B=9$ oraz $y_B=4$, czyli $B=(9,4)$.

<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze równanie lub zależność pozwalająca obliczyć współrzędne punktu S, przecięcia środkowych trójkąta, np.: $\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ lub $|AS|=\frac{2}{3}|AM|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy współrzędne środka ciężkości trójkąta ABC: $S=\left(\frac{7}{3},4\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.. 4 p.

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne środka podstawy AB trójkąta ABC, np.: $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+1 \\ y=-3x+11 \end{cases}$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający zapisze równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).. 5 p.

Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne wierzchołka B:
  $3=\frac{-3+x_B}{2}$ oraz $2=\frac{0+y_B}{2}$

albo

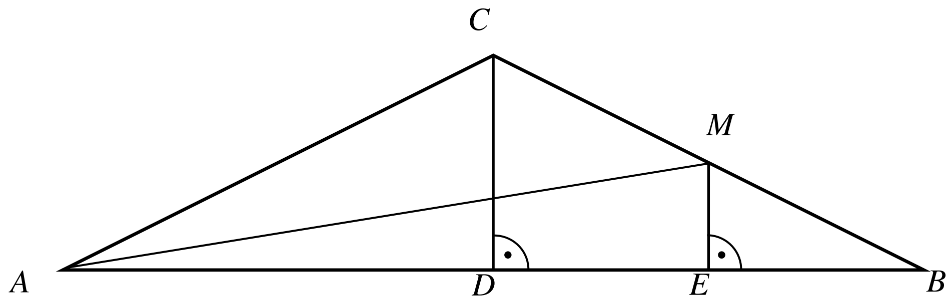
- obliczy współrzędne wierzchołka B z błedami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka B: $(9,4)$.

III sposób rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Długość środkowej *AM* jest równa

$$|AM|=\sqrt{(5+3)^2+(6-0)^2}=10.$$

Równanie prostej *AB* możemy zapisać w postaci $x-3y+3=0$. Długość odcinka *ME* jest równa odległości punktu *M* od prostej *AB*, więc

$$|ME|=\frac{|5-3\cdot 6+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *AME* otrzymujemy

$$|AM|^2=|AE|^2+|ME|^2\text{, czyli } 10^2=|AE|^2+\left(\sqrt{10}\right)^2.$$

Stąd $|AE|=\sqrt{100-10}=3\sqrt{10}$.

Punkt *D* jest środkiem boku *AB*, gdyż trójkąt *ABC* jest równoramienny. Ponieważ *M* jest środkiem *BC*, a odcinki *CD* i *ME* są równoległe, więc punkt *E* jest środkiem odcinka *BD*.

Zatem $|AE|=\frac{3}{4}|AB|$. Stąd wynika, że $|AB|=\frac{4}{3}|AE|=\frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{10}=4\sqrt{10}$.

Punkt $B=(x_B, y_B)$ leży na prostej *AB*, więc $B=\left(x_B, \frac{1}{3}x_B+1\right)$, gdzie $x_B>5$.

Ponieważ $|AB|=4\sqrt{10}$, więc stąd i ze wzoru na odległość między dwoma punktami otrzymujemy

$$\sqrt{(x_B+3)^2+\left(\frac{1}{3}x_B+1\right)^2}=4\sqrt{10},$$

$$\sqrt{(x_B+3)^2+\frac{1}{9}(x_B+3)^2}=\sqrt{160},$$

$$\frac{10}{9}(x_B+3)^2=160,$$

$$(x_B+3)^2=16\cdot 9,$$

$$x_B+3=12 \text{ lub } x_B+3=-12,$$

$$x_B=9 \text{ lub } x_B=-15.$$

Tylko pierwsze z tych rozwiązań spełnia warunek $x_B > 5$, więc $x_B = 9$. Zatem

$B = \left(9, \frac{1}{3} \cdot 9 + 1\right) = (9, 4)$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- obliczy długość środkowej *AM*: $|AM| = 10$

albo

- obliczy odległość punktu *M* od prostej *AB*: $|ME| = \sqrt{10}$

albo

- zapisze, że punkt *E* jest środkiem odcinka *BD*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- obliczy długości odcinków *AM* i *ME*: $|AM| = 10$, $|ME| = \sqrt{10}$

albo

- obliczy długość jednego z odcinków *AM* lub *ME* i zapisze, że punkt *E* jest środkiem *BD*

albo

- obliczy długość jednego z odcinków *AM* lub *ME* i zapisze współrzędne punktu *B* w zależności od jednej zmiennej, np.: $B = \left(x_B, \frac{1}{3}x_B + 1\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.. 4 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą – współrzędną punktu *B*, np.:

$\sqrt{\left(x_B + 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x_B + 1\right)^2} = 4\sqrt{10}$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający obliczy długość boku *AB*, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).. 5 p.

Zdający

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą i na tym zakończy, np.:
  $\frac{10}{9}\left(x_B + 3\right)^2 = 160$

albo

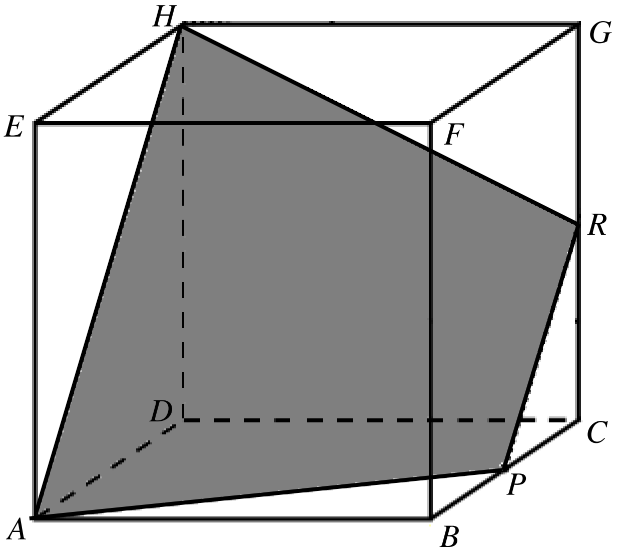
- obliczy współrzędne punktu *B* z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka *B*: $(9, 4)$.

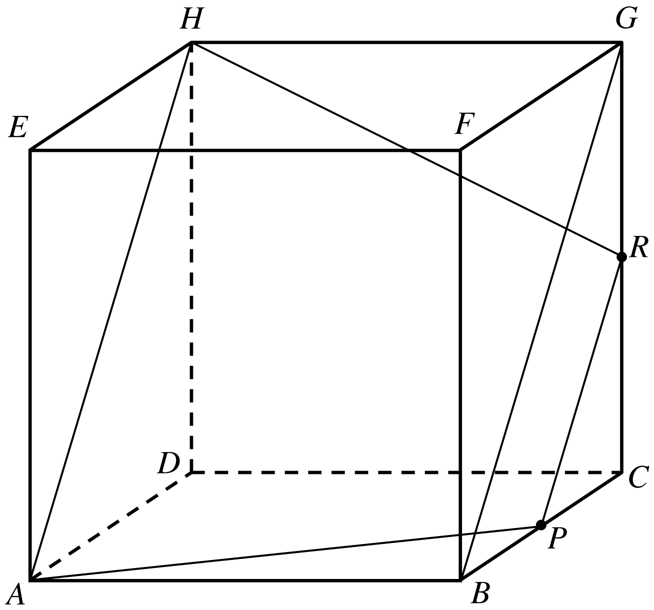
Zadanie 9. ***(5 pkt)***

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 2. Punkt P jest środkiem krawędzi BC. Płaszczyzna AHP przecina krawędź CG w punkcie R (zobacz rysunek). Oblicz pole przekroju tego sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez punkty A, H, R i P.



Rozwiązanie

Niech R będzie punktem, w którym krawędź boczna CG sześcianu przebija płaszczyznę APH szukanego przekroju.



Ponieważ płaszczyzny ścian $ADHE$ i $BCGF$ są równoległe, więc każda płaszczyzna, która nie jest do nich równoległa przecina te płaszczyzny wzdłuż dwóch prostych równoległych.

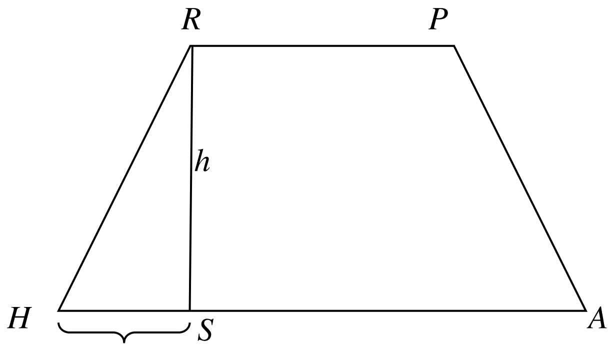
Wynika stąd, że przekrój $APRH$ jest trapezem o podstawach AH i PR. Ponieważ odcinek BG jest równoległy do AH, a odcinek AH jest równoległy do PR, więc PR jest równoległy do BG. Stąd i z faktu, że P jest środkiem BC wynika, że R jest środkiem CG. To z kolei oznacza, wobec przystawania trójkątów ABP i HGR, że trapez $APRH$ jest równoramienny, a długość podstawy PR jest połową długości podstawy AH.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABP otrzymujemy

$$|AP|^2 = |AB|^2 + |BP|^2 = 2^2 + 1^2 = 5.$$

Stąd $|AP| = |HR| = \sqrt{5}$. Podstawy AH i PR mają długości $|AH| = 2\sqrt{2}$, $|PR| = \sqrt{2}$.

Narysujmy trapez $HAPR$ i jego wysokość RS opuszczoną z wierzchołka R.



Ponieważ jest to trapez równoramienny, więc

$$|HS| = \frac{1}{2}\left(|AH| - |PR|\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta HSR otrzymujemy

$$|HR|^2 + h^2 = |HS|^2,$$

$$\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2.$$

Stąd $h = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{5 - \tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{9}{2}} = \tfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Pole przekroju jest więc równe

$$P_{APRH} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}.$$

<u>Schemat punktowania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający
- zapisze, że przekrój jest trapezem

albo
- obliczy długość ramienia trapezu: $|AP| = \sqrt{5}$

albo
- obliczy długość krótszej podstawy trapezu: $|PR| = \sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy długości boków trapezu: $|AH| = 2\sqrt{2}$, $|PR| = \sqrt{2}$, $|AP| = \sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający obliczy długość wysokości trapezu: $h=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Uwaga
Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu wysokości trapezu, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy pole przekroju: $\frac{9}{2}$.

Zadanie 10. ***(4 pkt)***
Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których liczba 1 jest jedynym całkowitym pierwiastkiem wielomianu $W(x)=mx^3+x^2+(m^2-9)x+m$.

Rozwiązanie
Ponieważ liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu *W*, więc $W(1)=0$. Otrzymujemy zatem równanie

$$m\cdot 1^3+1^2+(m^2-9)\cdot 1+m=0,$$
$$m^2+2m-8=0,$$
$$(m+4)(m-2)=0.$$

Stąd wynika, że $m=-4$ lub $m=2$.
Gdy $m=-4$, to wielomian *W* ma postać $W(x)=-4x^3+x^2+7x-4$.
Ponieważ liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu, zatem wielomian *W* jest podzielny przez dwumian $x-1$. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy

$$-4x^3+x^2+7x-4=-(x-1)(4x^2+3x-4).$$

Ponieważ trójmian $4x^2+3x-4$ ma współczynniki wymierne i różne od 0, a jego wyróżnik $\Delta=(-3)^2-4\cdot(-4)\cdot 4=9+64=73$ nie jest kwadratem liczby wymiernej, więc pierwiastki tego trójmianu są liczbami niewymiernymi ($x_1=\frac{\sqrt{73}-3}{8}$, $x_2=\frac{-3-\sqrt{73}}{8}$). Zatem dla $m=-4$ liczba 1 jest jedynym całkowitym pierwiastkiem wielomianu *W*.
Gdy natomiast $m=2$, to $W(x)=2x^3+x^2-5x+2$. Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu, zatem wielomian *W* jest podzielny przez dwumian $x-1$. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy

$$2x^3+x^2-5x+2=(x-1)(2x^2+3x-2).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu $2x^2+3x-2$:

$$\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25,\ \sqrt{\Delta}=5,$$
$$x_1=\frac{-3-5}{4}=-2,\ x_2=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2},$$

Jeden z pozostałych pierwiastków jest całkowity, zatem dla $m=2$ nie są spełnione warunki zadania.

Uwaga

Te wartości parametru *m*, dla których liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu *W* możemy też wyznaczyć dzieląc wielomian W przez dwumian $x-1$, a następnie otrzymaną resztą przyrównując do zera. Dzielenie możemy wykonać stosując np. algorytm Hornera

	m	1	m^2-9	m
1	m	$m+1$	m^2+m-8	m^2+2m-8

Reszta jest równa $m^2+2m-8=0$. Zatem $(m+4)(m-2)=0$, więc $m=-4$ lub $m=2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zapisze równanie z niewiadomą *m*, np. $m\cdot 1^3+1^2+\left(m^2-9\right)\cdot 1+m=0$

albo

- podzieli wielomian *W* przez dwumian $x-1$ otrzyma resztę z tego dzielenia równą m^2+2m-8.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy wartości parametru *m*: $m=-4$ lub $m=2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- podzieli wielomiany: $W(x)=-4x^3+x^2+7x-4$ i $W(x)=2x^3+x^2-5x+2$ przez dwumian $(x-1)$ i otrzyma odpowiednio ilorazy: $-4x^2-3x+4$ oraz $2x^2+3x-2$, obliczy pozostałe pierwiastki tych wielomianów i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

albo

- podzieli wielomian $W(x)=2x^3+x^2-5x+2$ przez dwumian $(x-1)$ i otrzyma iloraz $2x^2+3x-2$, sprawdzi, że liczba $\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem tego trójmianu i nie odrzuci parametru $m=2$

albo

- podzieli wielomian $W(x)=2x^3+x^2-5x+2$ przez dwumian $(x-1)$ i otrzyma iloraz $2x^2+3x-2$, sprawdzi, że liczba -2 jest pierwiastkiem tego trójmianu i nie odrzuci parametru $m=2$.

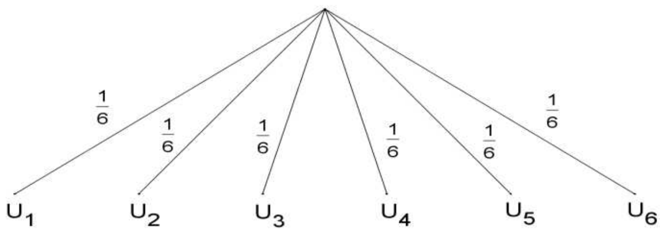
Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający wyznaczy wszystkie wartości parametru m, dla których liczba 1 jest jedynym całkowitym pierwiastkiem wielomianu *W*: $m=-4$.

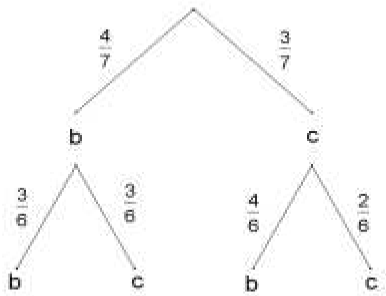
Zadanie 11. *(4 pkt)*
Każda z urn oznaczonych liczbami 1, 2, 3 zawiera po 3 kule czarne i 4 białe, a każda urna oznaczona liczbami 4, 5, 6 zawiera po 3 czarne i 2 białe kule. Rzucamy sześcienną kostką do gry, a następnie z urny o numerze równym liczbie wyrzuconych oczek losujemy bez zwracania 2 kule. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie dwóch kul czarnych, czy dwóch kul białych?

Rozwiązanie
Przyjmujemy oznaczenia:
U_n – urna, z której losujemy, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
b – wylosowanie kuli białej,
c – wylosowanie kuli czarnej,
B – zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch kul białych,
C – zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch kul czarnych.

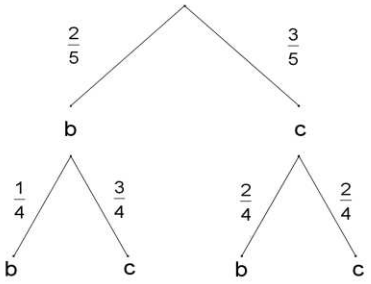
W pierwszej części doświadczenia rzucamy sześcienną kostką do gry. Liczba oczek wyrzucona na kostce wskazuje numer urny, z której losujemy kule. Prawdopodobieństwo wyboru urny do losowania jest jednakowe dla wszystkich sześciu urn i jest równe $\frac{1}{6}$.
Rysujemy drzewo probabilistyczne dla pierwszego etapu doświadczenia, z określonymi prawdopodobieństwami przy gałęziach.



Jeśli na kostce wypadnie liczba oczek równa 1, 2 lub 3, drzewo probabilistyczne, obrazujące drugą część doświadczenia, będzie wyglądało następująco:



Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych z urn U_1, U_2, U_3 jest równe $P_{1,2,3}(B) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{7}$.
Natomiast prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych z urn U_1, U_2, U_3 jest równe $P_{1,2,3}(C) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{14}$
Jeśli na kostce wypadnie liczba oczek równa 4, 5 lub 6, drzewo probabilistyczne, obrazujące drugą część doświadczenia, będzie wyglądało następująco:



Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych z urn U_4, U_5, U_6 jest równe

$P_{4,5,6}(B) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

Natomiast prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych z urn U_4, U_5, U_6 jest równe $P_{4,5,6}(C) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{20}$.

Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych w tym doświadczeniu jest równe $P(B) = P_{1,2,3}(B) + P_{4,5,6}(B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{20} = \frac{20}{140} + \frac{7}{140} = \frac{27}{140}$, zaś prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych jest równe

$P(C) = P_{1,2,3}(C) + P_{4,5,6}(C) = \frac{1}{14} + \frac{3}{20} = \frac{10}{140} + \frac{21}{140} = \frac{31}{140}$.

Ponieważ $P(C) > P(B)$, więc bardziej prawdopodobne w tym doświadczeniu jest wylosowanie dwóch kul czarnych.

__Schemat oceniania__
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania... 1 p.
Zdający
- narysuje drzewo probabilistyczne i zapisze prawdopodobieństwa na gałęziach i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie

albo
- zdający narysuje drzewo probabilistyczne, wskaże istotne gałęzie drzewa i tylko na nich zapisze prawdopodobieństwa, i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

__Uwaga__
Oceniamy rozwiązanie na **0 punktów**, gdy w dalszej części rozwiązania zdający doda prawdopodobieństwa wzdłuż gałęzi zamiast mnożyć albo pomnoży otrzymane iloczyny zamiast je dodać.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający
- obliczy $P(C) = \frac{31}{140}$ lub $P(B) = \frac{27}{140}$

albo
- obliczy $P_{1,2,3}(B) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{7}$ i $P_{1,2,3}(C) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{14}$

albo

- obliczy $P_{4,5,6}(B)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ i $P_{4,5,6}(C)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{20}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 p.
Zdający obliczy $P(C)=\frac{31}{140}$ i $P(B)=\frac{27}{140}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający zapisze: $P(C)>P(B)$ i wskaże bardziej prawdopodobne zdarzenie: wylosowanie dwóch kul czarnych.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(C)<0$ lub $P(C)>1$ lub $P(B)<0$ lub $P(B)>1$, to otrzymuje **za całe zadanie 0 punktów**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy podczas obliczania prawdopodobieństwa i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.