# Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

## Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

poziom rozszerzony

24 kwietnia 2021

Czas pracy: 180 minut

## Zadania zamknięte

### ZADANIE 1 (1 PKT)

Wielomian $W(x) = x^7 - 5ax^5 + 4bx^4 - 6x + 8$ jest podzielny przez wielomian $(x^2 - 1)$. Zatem

A) $a + b = -1$. B) $a + b = -2$. C) $a + b = -3$. D) $a + b = 0$.

### ZADANIE 2 (1 PKT)

Prosta $k : 2x + y + b = 0$ ma dwa punkty wspólne z parabolą $y = -x^2 - 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy

A) $b < 2$ B) $b > -2$ C) $b < -2$ D) $b > 2$

### ZADANIE 3 (1 PKT)

Wyrażenie $\binom{2n+1}{n} : \binom{2n-1}{n}$ dla liczby naturalnej $n \geqslant 2$ jest równe

A) $\frac{n-1}{2n-1}$ B) $\frac{2n+1}{2n-1}$ C) 2 D) $\frac{4n+2}{n+1}$

### ZADANIE 4 (1 PKT)

Rozwiązaniem nierówności $\frac{8}{x^3} \leqslant 1$ jest zbiór

A) $(-\infty, 2\rangle$ B) $(-\infty, 0) \cup \langle 2, +\infty)$ C) $\langle 2, +\infty)$ D) $(0, 2\rangle$

Zadanie 5 (2 pkt)

W trójkącie $ABC$ bok $BC$ jest 3 razy krótszy od boku $AC$, a długość boku $AB$ stanowi $\frac{5}{2}$ długości boku $BC$. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta $ABC$.

ZADANIE 6 (3 PKT)

Z punktu $A = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ poprowadzono styczne do wykresu funkcji $y = 2x - x^2$. Wyznacz równia tych stycznych.

## Zadanie 7 (3 pkt)

Dana jest liczba $k > 1$. Wyrazy ciągu $(a_n)$, określonego dla $n \geqslant 1$, spełniają warunki

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n) = \frac{k^2}{k-1} \\ 1+\log_k a_{n+1} = \log_k a_n, \quad \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Udowodnij, że

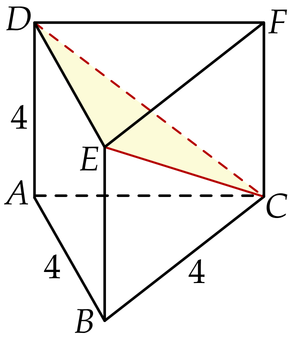
$$\lim_{n\to+\infty}(a_1^2+a_3^2+a_5^2+\ldots+a_{2n+1}^2) = \frac{k^6}{k^4-1}.$$

## ZADANIE 8 (4 PKT)

Wiadomo, że $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$. Udowodnij, że przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

## Zadanie 9 (4 pkt)

Każda krawędź graniastosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$ ma długość 4 (zobacz rysunek).




Oblicz odległość wierzchołka $F$ tego graniastosłupa od płaszczyzny $DEC$.

## ZADANIE 10 (4 PKT)

Rozwiąż równanie

$$\operatorname{tg} x + 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \ldots = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \operatorname{tg} x)\operatorname{tg} 2x,$$

w którym lewa strona jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

## Zadanie 11 (4 pkt)

Oblicz, ile jest wszystkich ośmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie cztery cyfry 4 i dokładnie dwie cyfry 2.

## Zadanie 12 (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 + (m-6)x^2 + (m-7)x$ tworzą ciąg arytmetyczny.

## Zadanie 13 (5 pkt)

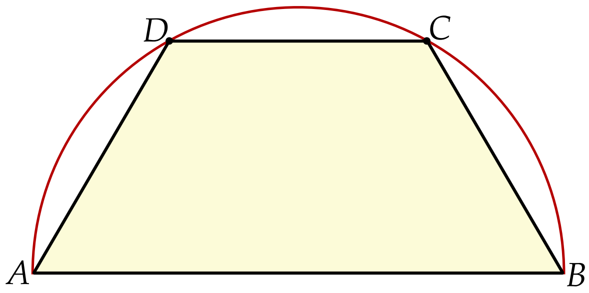
Jeden bok kwadratu opisanego okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 3 = 0$ jest zawarty w prostej o równaniu $x + 2y - 12 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

## Zadanie 14 (5 pkt)

W pudełku znajduje się $n > 2$ sześciennych kostek do gry, przy czym $k$ spośród tych kostek ($k > 0$ i $k < n$) ma na dwóch ściankach jedno oczko, a na pozostałych czterech ściankach sześć oczek. Wybieramy losowo jedną z tych kostek i wykonujemy nią cztery kolejne rzuty. Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana kostka miała jedno oczko na dwóch ściankach, jeżeli wiadomo, że w każdym z czterech wykonanych rzutów otrzymano ściankę z sześcioma oczkami.

## ZADANIE 15 (7 PKT)

Z arkusza blachy w kształcie półkola o promieniu $R$ należy wyciąć trapez, którego jedna podstawa jest średnicą tego półkola, a wierzchołki drugiej podstawy leżą na jego brzegu (zobacz rysunek).




Oblicz jaką długość powinno mieć ramię tego trapezu, aby jego pole było największe możliwe. Oblicz to pole.