Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

20 MARCA 2010

CZAS PRACY: 180 MINUT

ZADANIE 1 (4 PKT.)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $\left|\frac{1}{7^x} - \sqrt{3}\right| - m = 0$ ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest ujemny.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

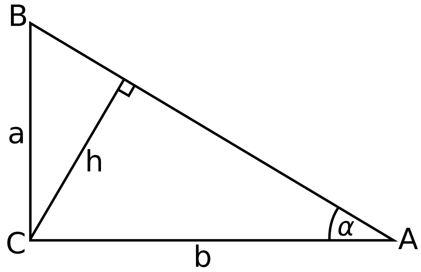
ZADANIE 2 (4 PKT.)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5|y| + 3x = 3y + 3 \\ |4y + 9x| = 6y. \end{cases}$

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

ZADANIE 3 (5 PKT.)

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AC| = b$, $|BC| = a$, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h.



Wykaż, że jeżeli $b^2 = a \cdot h$ to $\cos \measuredangle BAC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

ZADANIE 4 (5 PKT.)

Z miejscowości A i B, które są odległe o 58,5 km wyruszyły jednocześnie ku sobie dwa samochody. Pierwszy samochód w ciągu pierwszej minuty jechał ze średnią prędkością 30 km/h, a w ciągu każdej następnej minuty pokonywał drogę o 0,25 km dłuższą, niż w ciągu poprzedniej minuty. Drugi samochód przez pierwsze 6 minut przejechał 21 kilometrów, a potem jechał ze stałą prędkością 150 km/h. Oblicz po ilu minutach nastąpi spotkanie samochodów.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

ZADANIE 5 (4 PKT.)

Ciąg (b_n) jest nieskończonym ciągiem liczb dodatnich, a ciąg (a_n) spełnia warunek

$$a_{n+1} - a_n = \log 2b_n - \log b_{101-n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots, 100.$$

Oblicz $a_{101} - a_1$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

ZADANIE 6 (4 PKT.)

Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 10\}$ losujemy dwie różne liczby n i k. Oblicz prawdopodobieństwo, że

$$\binom{2n}{2} > k \cdot \binom{n}{1}.$$

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

ZADANIE 7 (5 PKT.)

Okrąg o środku O jest wpisany w trójkąt ABC, gdzie $A = (-3,5)$. Wiedząc, że okrąg ten jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach $K = (0,-1)$ i $L = (3,2)$ oblicz długość odcinka AO.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

ZADANIE 8 (5 PKT.)

Wyznacz wartość parametru m, dla którego równanie

$$x^3 + (m-2)x^2 + (6-2m)x - 12 = 0$$

ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 spełniające warunki $x_3 = -x_1$ oraz $x_2 = x_1 - 1$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

ZADANIE 9 (4 PKT.)

Trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu o promieniu r.

a) Wykaż, że $|AB| + |CD| \geqslant 4r$.

b) Wiedząc, że pole trapezu jest równe 4 wykaż, że $r \leqslant 1$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

ZADANIE 10 (6 PKT.)

Na płaskiej powierzchni położono trzy kule K_1, K_2, K_3, każda o promieniu 2 tak, że kule K_1 i K_2 są styczne w punkcie P_3, kule K_2 i K_3 są styczne w punkcie P_1, a kule K_3 i K_1 są styczne w punkcie P_2. Następnie położono na tych kulach kulę K_4 o promieniu 3, która jest styczna do kul K_1, K_2, K_3 odpowiednio w punktach S_1, S_2, S_3.

a) Uzasadnij, że odcinki P_1P_2 i S_1S_2 są równoległe.

b) Oblicz obwód trapezu $P_1P_2S_1S_2$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

ZADANIE 11 (4 PKT.)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq b$ oraz $m \neq 0$ równanie

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{m}$$

ma dwa różne rozwiązania.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info