

Miejsce  
na naklejkę  
z kodem szkoły

dysleksja

MMA-R1A1P-062

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz II

## POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 150 minut

ARKUSZ II

MAJ  
ROK 2006

### Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 12 – 21). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ⊙ i zaznacz właściwe.

Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

*Życzymy powodzenia!*

Wypełnia zdający przed  
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

--	--	--

KOD  
ZDAJĄCEGO

**Zadanie 12. (5 pkt)**

Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  prawdziwy jest wzór:  $1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \dots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1$ .

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	12.1.	12.2.	12.3.	12.4.	12.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

**Zadanie 13. (5 pkt)**

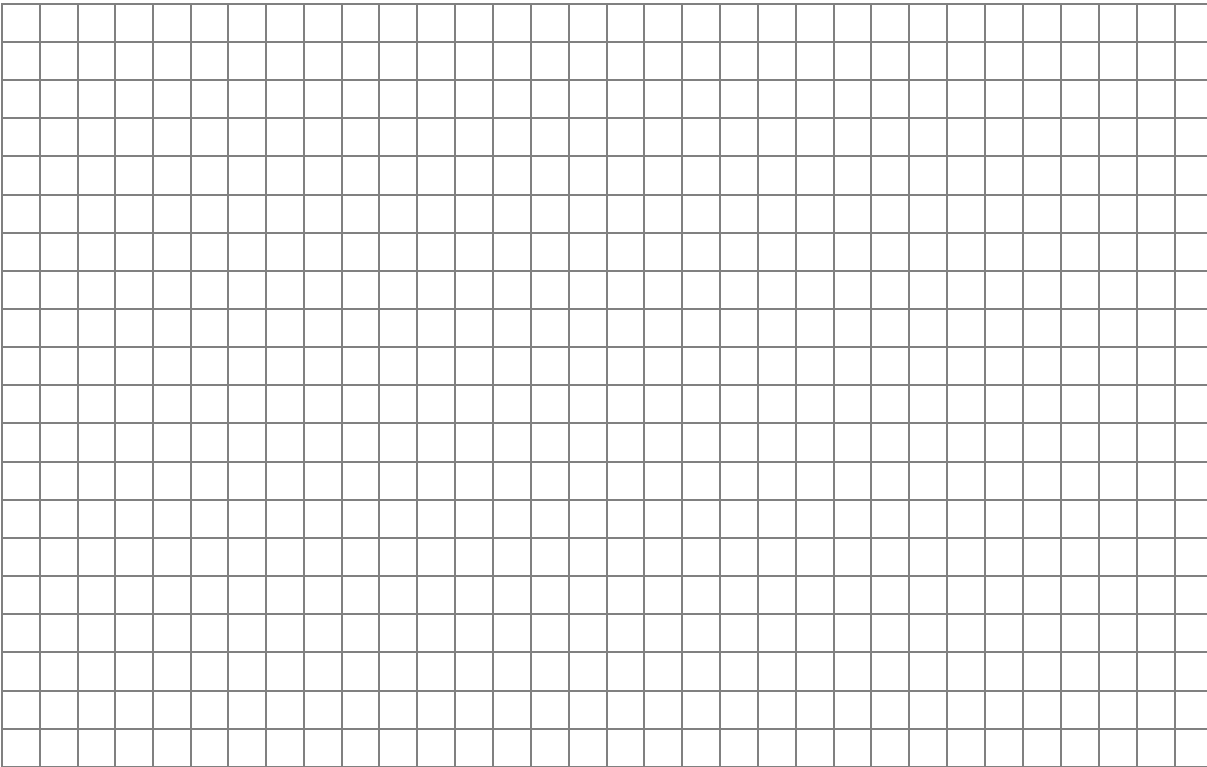
Dany jest ciąg  $(a_n)$ , gdzie  $a_n = \frac{5n+6}{10(n+1)}$  dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .

- Zbadaj monotoniczność ciągu  $(a_n)$ .
- Oblicz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- Podaj największą liczbę  $a$  i najmniejszą liczbę  $b$  takie, że dla każdego  $n$  spełniony jest warunek  $a \leq a_n \leq b$ .

<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>13.1.</b>	<b>13.2.</b>	<b>13.3.</b>	<b>13.4.</b>	<b>13.5.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>					

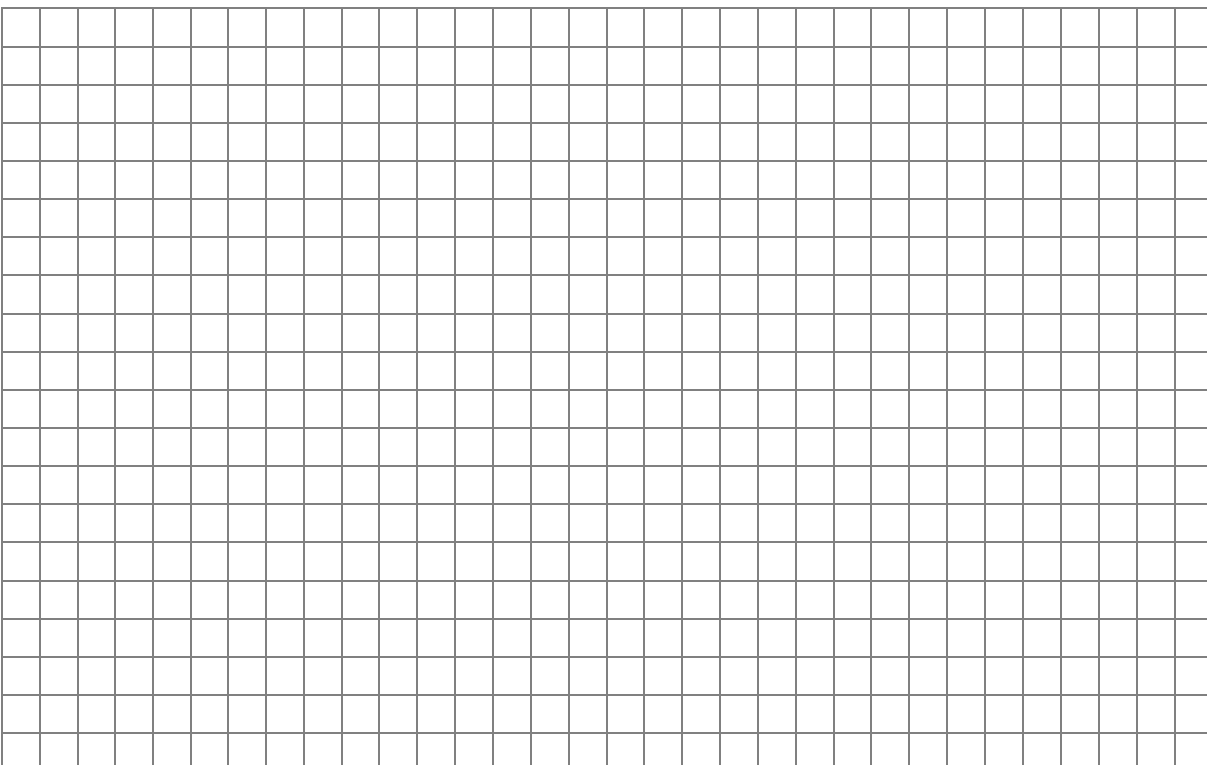
**Zadanie 14. (4 pkt)**

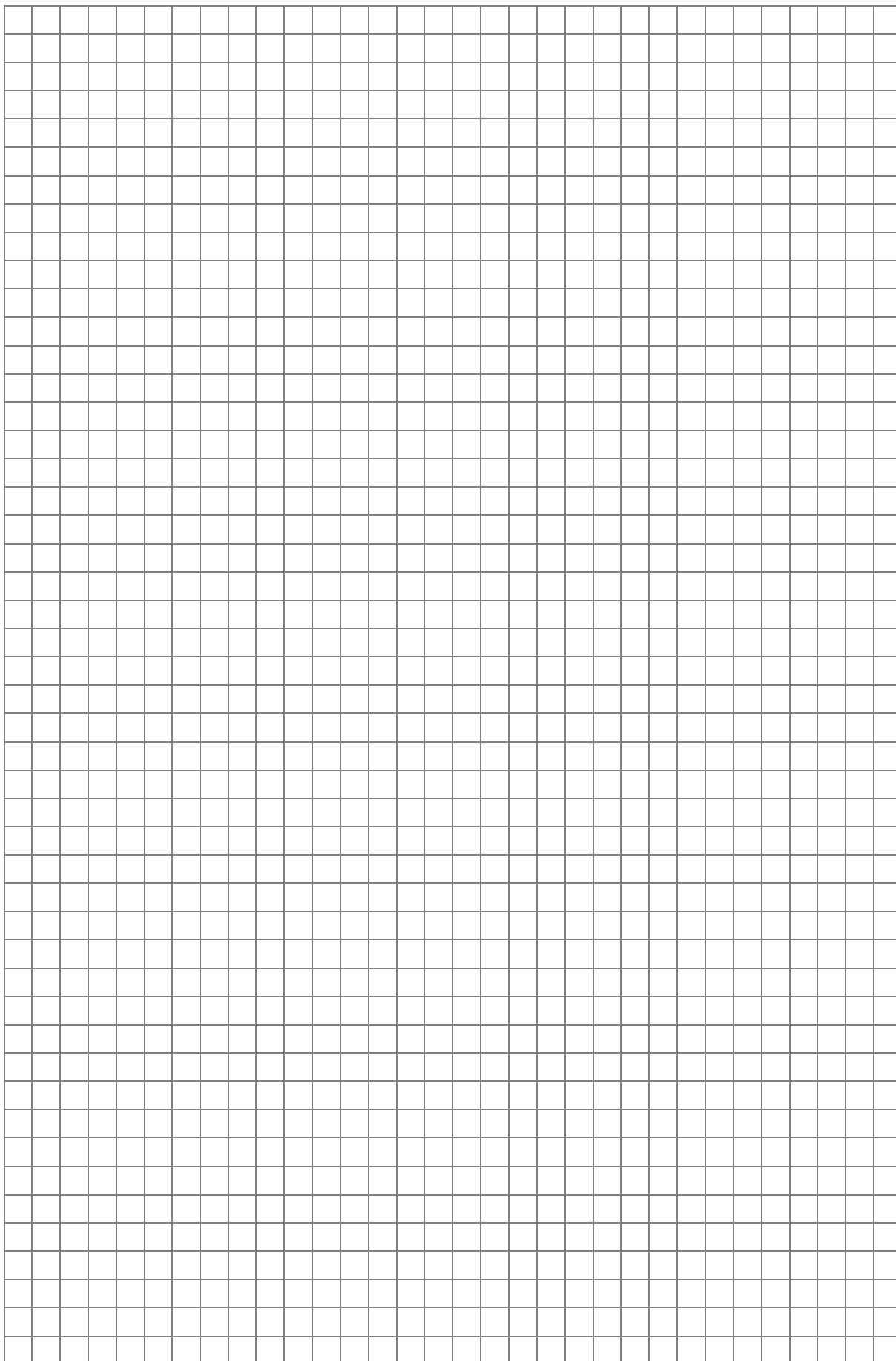
a) Naszkicuj wykres funkcji  $y = \sin 2x$  w przedziale  $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ .



b) Naszkicuj wykres funkcji  $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$  w przedziale  $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$

i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność  $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$ .

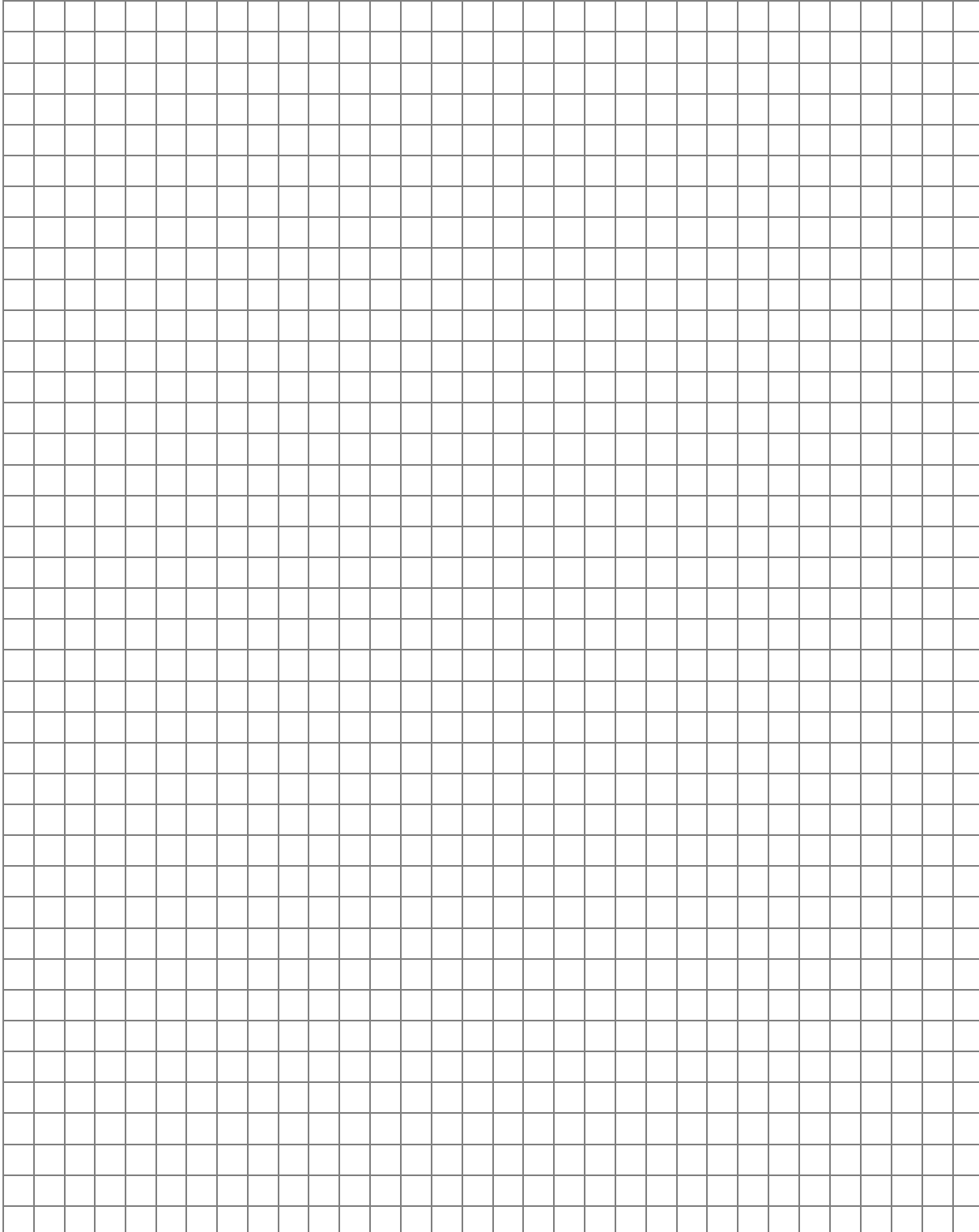




<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>14.1.</b>	<b>14.2.</b>	<b>14.3.</b>	<b>14.4.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>				

**Zadanie 15. (4 pkt)**

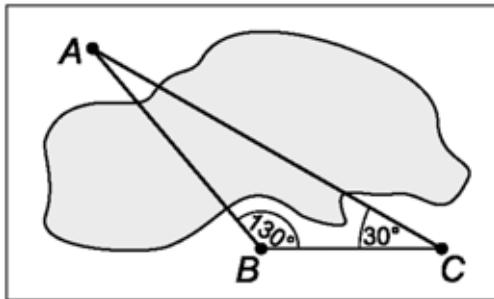
Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.



<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>15.1.</b>	<b>15.2.</b>	<b>15.3.</b>	<b>15.4.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>				

**Zadanie 16. (3 pkt)**

Obiekty  $A$  i  $B$  leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami  $B$  i  $C$  jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami  $A$  i  $B$  i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



A large grid area provided for the student to show their calculations and answer the question.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	16.1.	16.2.	16.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

**Zadanie 17. (6 pkt)**

Na okręgu o promieniu  $r$  opisano trapez równoramienny  $ABCD$  o dłuższej podstawie  $AB$  i krótszej  $CD$ . Punkt styczności  $S$  dzieli ramię  $BC$  tak, że  $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$ .

- a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.  
b) Oblicz cosinus  $|\sphericalangle CBD|$ .

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	17.1.	17.2.	17.3.	17.4.	17.5.	17.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt						



**Zadanie 18. (7 pkt)**

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej  $2 \text{ m}^3$  istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>18.1.</b>	<b>18.2.</b>	<b>18.3.</b>	<b>18.4.</b>	<b>18.5.</b>	<b>18.6.</b>	<b>18.7.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>							

**Zadanie 19. (7 pkt)**

Nieskończony ciąg geometryczny  $(a_n)$  jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym:  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k - 2)$ , dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ . Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ , dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu  $(a_n)$ .

<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>19.1.</b>	<b>19.2.</b>	<b>19.3.</b>	<b>19.4.</b>	<b>19.5.</b>	<b>19.6.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>						

**Zadanie 20. (4 pkt)**

Dane są funkcje  $f(x) = 3^{x^2-5x}$  i  $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$ .

Oblicz, dla których argumentów  $x$  wartości funkcji  $f$  są większe od wartości funkcji  $g$ .

<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>20.1.</b>	<b>20.2.</b>	<b>20.3.</b>	<b>20.4.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>				

**Zadanie 21. (5 pkt)**

W trakcie badania przebiegu zmienności funkcji ustalono, że funkcja  $f$  ma następujące własności:

- jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- $f$  jest funkcją nieparzystą,
- $f$  jest funkcją ciągłą

oraz:

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-8, -3),$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-3, -1),$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-1, 0),$$

$$f'(-3) = f'(-1) = 0,$$

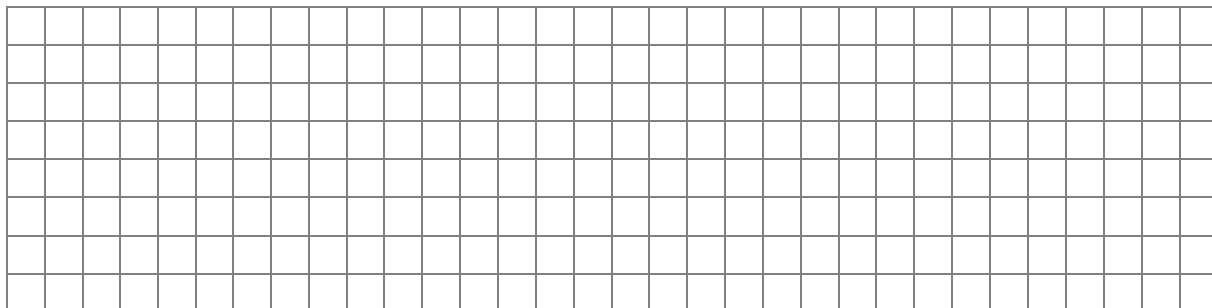
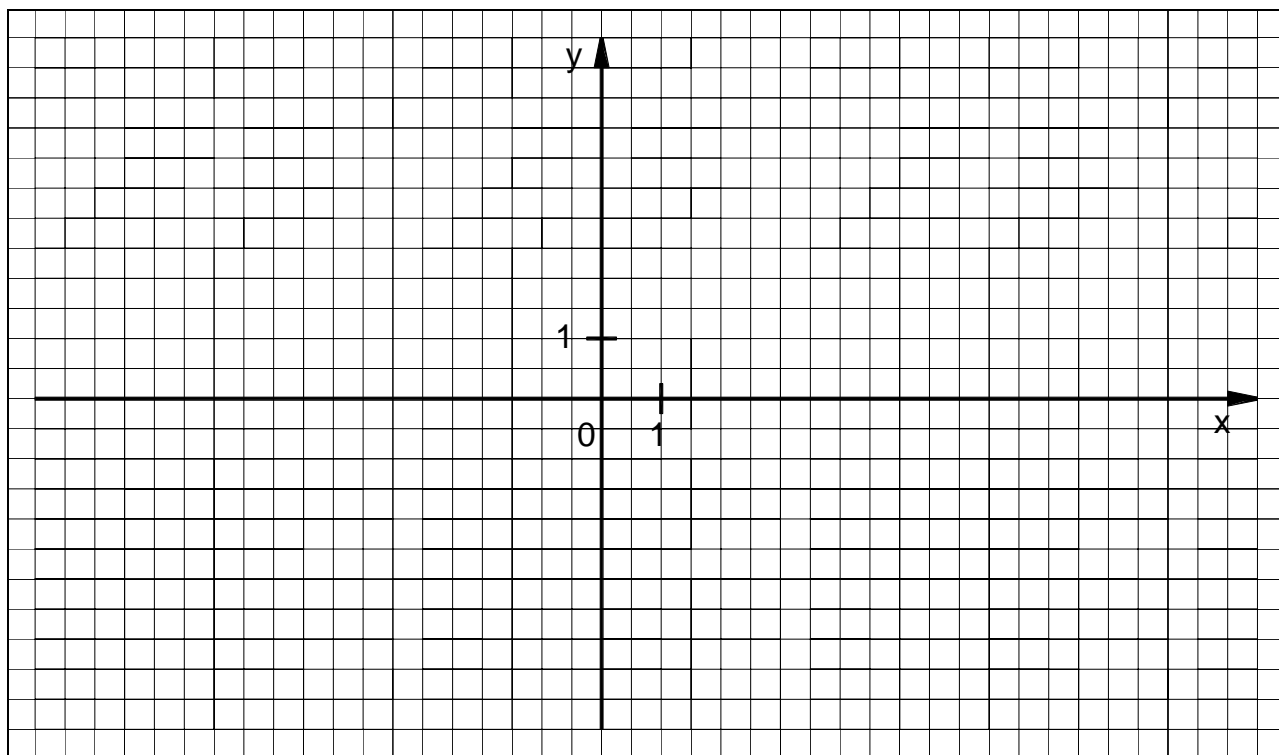
$$f(-8) = 0,$$

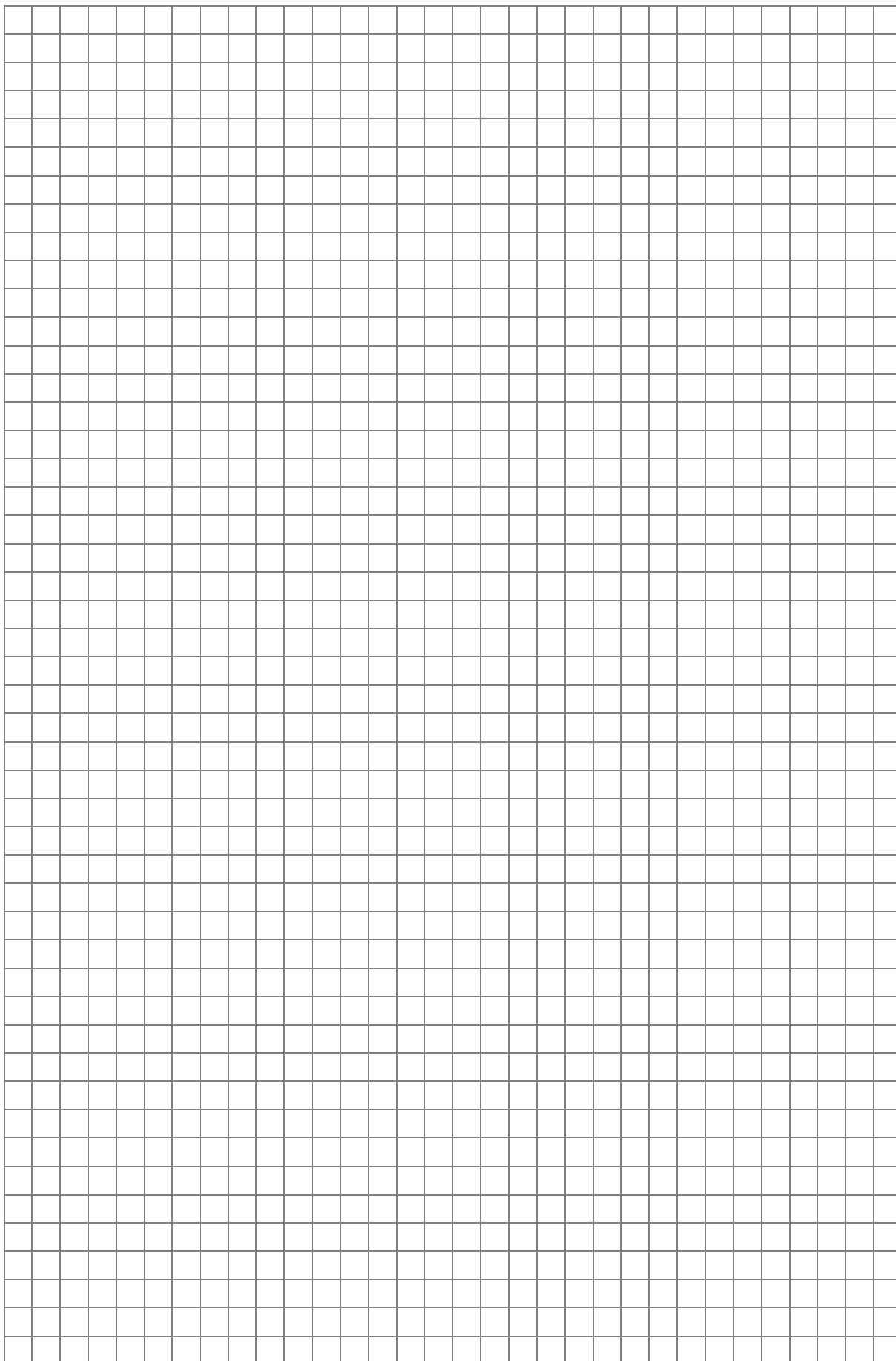
$$f(-3) = -2,$$

$$f(-2) = 0,$$

$$f(-1) = 1.$$

W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji  $f$  w przedziale  $\langle -8, 8 \rangle$ , wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.





<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>21.1.</b>	<b>21.2.</b>	<b>21.3.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>			

**BRUDNOPIS**