Materiały diagnostyczne z matematyki
poziom podstawowy

luty 2012

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
schemat oceniania

Materiały diagnostyczne przygotował zespół w składzie:

Agnieszka Sałaj
Nauczyciel I Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Białymstoku

Anna Rybak
Pracownik Uniwersytetu w Białymstoku

Artur Miśkiewicz
Nauczyciel i Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Zespole Szkół Ogólnokształcących w Iławie
Wicedyrektor Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Zespole Szkół Ogólnokształcących w Iławie

Cezary Kacprzyk
Nauczyciel III Liceum Ogólnokształcącego im. Alfreda Lityńskiego w Zespole Szkół nr 1 w Suwałkach

Dorota Mozyrska
Pracownik Politechniki Białostockiej

Elżbieta Guziejko
Nauczyciel Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Olecku

Ewa Olszewska
Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Handlowo-Ekonomicznych im. M. Kopernika w Białymstoku

Ewa Pawłuszewicz
Pracownik Politechniki Białostockiej

Ewa Ziętek
Nauczyciel II Liceum Ogólnokształcące im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie
Nauczyciel Technikum nr 6 w Zespole Szkół Elektronicznych i Telekomunikacyjnych w Olsztynie

Irena Jakóbowska
Nauczyciel VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie
Wicedyrektor VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie

Tomasz Chomicz
Nauczyciel w Zespole Szkół Ogólnokształcących i Zawodowych im. Jarosława Iwaszkiewicza w Ciechanowcu

Agata Siwik
Starszy ekspert ds. egzaminu maturalnego z matematyki w Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej
Kierownik Zespołu Matematyczno-Przyrodniczego w Wydziale Sprawdzianów, Egzaminów Gimnazjalnych i Matur w Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Łomży

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
odpowiedź	C	A	B	A	B	C	D	C	C	B	C	D	A	B	A	D	C	D	B	D	A	D	B	C

Schemat punktowania zadań otwartych

Zadanie 25. (*2 pkt*)

Rozwiąż równanie $\frac{3}{x}+\frac{x}{3}=\frac{5}{2}$ dla $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Mnożymy równanie $\frac{3}{x}+\frac{x}{3}=\frac{5}{2}$ obustronnie przez $6x$ i zapisujemy równanie kwadratowe $2x^2-15x+18=0$.

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2-15x+18$

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

  $\Delta = 225-4\cdot 2\cdot 18 = 81$ i stąd $x_1=\frac{15-9}{4}=\frac{3}{2}$ oraz $x_2=\frac{15+9}{4}=6$

albo

- stosujemy wzory Viete'a:

  $x_1+x_2=\frac{15}{2}$ oraz $x_1\cdot x_2=9$ i stąd $x_1=\frac{3}{2}$ oraz $x_2=6$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 punkt

gdy

- poprawnie przekształci równanie $\frac{3}{x}+\frac{x}{3}=\frac{5}{2}$ do równania kwadratowego $2x^2-15x+18=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

- zapisze równanie kwadratowe z błędem i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże równanie.

Zdający otrzymuje ....2 punkty

gdy poprawnie wyznaczy oba pierwiastki równania: $x_1=\frac{3}{2}$ oraz $x_2=6$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający przekształcając równanie $\frac{3}{x}+\frac{x}{3}=\frac{5}{2}$ otrzyma równanie liniowe, to za takie rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie kwadratowe z błędem i jeden z pierwiastków będzie równy 0, to za takie rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Wykaż, że jeśli $x>0$ i $y>0$, to $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y$.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Przekształcamy nierówność $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y$ do postaci $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}-x-y\geq 0$.

Sprowadzamy lewą stronę otrzymanej nierówności do postaci iloczynowej, wykorzystując np. wzory skróconego mnożenia:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}-x-y=\frac{x^3+y^3-x^2y-xy^2}{xy}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)}{xy}=\frac{(x+y)(x-y)^2}{xy}.$$

Z założenia mamy $x>0$ i $y>0$, stąd $xy>0$ i $x+y>0$, natomiast nierówność $(x-y)^2\geq 0$ jest prawdziwa dla dowolnych x i y, zatem $\frac{(x+y)(x-y)^2}{xy}\geq 0$. Co kończy dowód.

<u>Uwaga</u>

Uczeń może lewą stronę nierówności $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}-x-y\geq 0$ przekształcić do postaci iloczynowej, grupując wyrazy:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}-x-y=\frac{x^3+y^3-x^2y-xy^2}{xy}=\frac{x^2(x-y)-y^2(x-y)}{xy}=\frac{(x+y)(x-y)^2}{xy}.$$

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………1 punkt

gdy

- zapisze lewą stronę nierówności $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}-x-y\geq 0$ w postaci

  $$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}-x-y=\frac{x^3+y^3-x^2y-xy^2}{xy}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)}{xy}$$

  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

- zapisze lewą stronę nierówności $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}-x-y\geq 0$ w postaci

  $$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}-x-y=\frac{x^3+y^3-x^2y-xy^2}{xy}=\frac{x^2(x-y)-y^2(x-y)}{xy}$$

  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje …………………………………………………………......2 punkty

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania

Mnożymy obie strony nierówności $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y$ przez xy (z założenia mamy $x>0$ i $y>0$) i zapisujemy nierówność w postaci $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$.
Stosujemy wzór skróconego mnożenia i zapisujemy nierówność $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$ w postaci np. $(x+y)(x^2-xy+y^2)\geq (x+y)xy$.
Następnie sprowadzamy nierówność do postaci: $(x+y)(x-y)^2\geq 0$.
Z założenia mamy $x>0$ i $y>0$, stąd $x+y>0$, natomiast nierówność $(x-y)^2\geq 0$ jest prawdziwa dla dowolnych x i y, zatem $(x+y)(x-y)^2\geq 0$. Co kończy dowód.

Uwaga
Uczeń może przekształcić nierówność $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$ do postaci $x^3+y^3-x^2y-xy^2\geq 0$, następnie pogrupować wyrazy i zapisać lewą stronę nierówności w postaci $x^2(x-y)-y^2(x-y)\geq 0$.

Schemat oceniania II sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………1 punkt

gdy

- zapisze nierówność $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$ w postaci $(x+y)(x^2-xy+y^2)\geq (x+y)xy$,

albo

- zapisze nierówność $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$ w postaci $x^2(x-y)-y^2(x-y)\geq 0$,

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje …………………………………………………………….....2 punkty

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający podstawi konkretne wartości w miejsce x i y, to przyznajemy **0 punktów.**

III sposób rozwiązania
Dla dowolnych x i y, prawdziwa jest nierówność: $(x-y)^2\geq 0$.
Z założenia mamy $x>0$ i $y>0$, stąd $x+y>0$, zatem $(x+y)(x-y)^2\geq 0$.
Stosujemy wzór skróconego mnożenia i redukcję wyrazów i przekształcamy lewą stronę nierówności $(x+y)(x-y)^2\geq 0$ do postaci: $x^3+y^3-x^2y-xy^2\geq 0$, a następnie do postaci $x^3+y^3\geq xy(x+y)$.
Dzielimy obie strony nierówności $x^3+y^3\geq xy(x+y)$ przez xy (z założenia mamy $x>0$ i $y>0$, stąd $xy>0$) i wnioskujemy, że $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………1 punkt

gdy korzystając z założenia $x>0$ i $y>0$, doprowadzi nierówność $(x-y)^2 \geq 0$ do nierówności $x^3+y^3-x^2y-xy^2 \geq 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………….....2 punkty

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

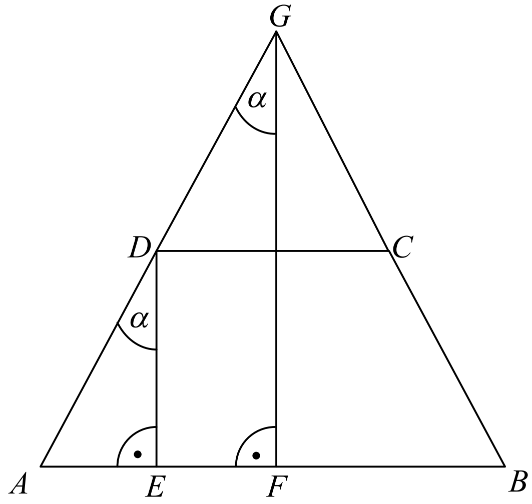
<u>Uwaga</u>

Zdający otrzymuje **1 punkt**, jeśli uzasadniając daną nierówność <u>nie zapisze</u>, że $x+y>0$ i $x \cdot y>0$.

Zadanie 27. (*2 pkt*)

Dany jest trapez *ABCD*. Dłuższa podstawa *AB* ma długość *m*, pozostałe trzy boki trapezu są równej długości. Przedłużenia ramion trapezu *AD* i *BC* przecinają się w punkcie *E* pod kątem 2α . Oblicz obwód tego trapezu.

I sposób rozwiązania



Wprowadzamy oznaczenia $|AD|=|BC|=|CD|=x$ i $|AB|=m$.

Zauważamy, że trójkąty *ADE* i *AGF* są podobne, zatem $|\sphericalangle ADE|=|\sphericalangle AGF|=\alpha$.

Różnica między długościami podstaw trapezu jest równa $|AB|-|CD|=m-x$. Stąd $|AE|=\frac{m-x}{2}$.

Trójkąt *ADE* jest prostokątny, zatem $\sin\alpha=\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{\frac{m-x}{2}}{x}$. Stąd $x=\frac{m}{2\sin\alpha+1}$.

Wyznaczamy obwód trapezu *ABCD*:

$$O=|AB|+3|AD|=m+3x=m+3\frac{m}{2\sin\alpha+1}=\frac{2m\sin\alpha+4m}{2\sin\alpha+1}=\frac{2m(\sin\alpha+2)}{2\sin\alpha+1}.$$

Schemat oceniania I sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………1 punkt

gdy

zauważy, że trójkąty *ADE* i *AGF* są podobne oraz zapisze równość $\sin\alpha=\frac{\frac{m-x}{2}}{x}$.

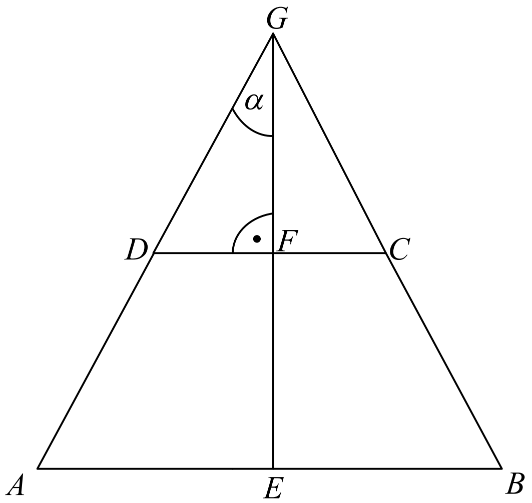
Zdający otrzymuje ……………………………………………………………......2 punkty

gdy wyznaczy obwód trapezu $O=\frac{2m(\sin\alpha+2)}{2\sin\alpha+1}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu x i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
2. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

II sposób rozwiązania



Zauważamy, że trójkąty ABG i DCG są podobne.
Wprowadzamy oznaczenia $|AD|=|BC|=|CD|=x$, $|DG|=|CG|=y$ i $|AB|=m$.

Trójkąty ABG i DCG są podobne, zatem $\frac{|DC|}{|AB|}=\frac{|DG|}{|AG|}$. Stąd $\frac{x}{m}=\frac{y}{x+y}$.

Trójkąt DFG jest prostokątny, zatem $\sin\alpha=\frac{|DF|}{|DG|}=\frac{\frac{x}{2}}{y}$. Stąd $y=\frac{\frac{1}{2}x}{\sin\alpha}=\frac{x}{2\sin\alpha}$.

Podstawiamy $y=\frac{x}{2\sin\alpha}$ do równania $\frac{x}{m}=\frac{y}{x+y}$ i otrzymujemy $x=\frac{m}{2\sin\alpha+1}$.

Wyznaczamy obwód trapezu $ABCD$:

$$O=|AB|+3|CD|=m+3x=m+3\frac{m}{2\sin\alpha+1}=\frac{2m\sin\alpha+4m}{2\sin\alpha+1}=\frac{2m(\sin\alpha+2)}{2\sin\alpha+1}.$$

Schemat oceniania II sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 punkt

gdy

zauważy, że trójkąty ABG i DCG są podobne, stąd $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$ oraz zauważy, że $\sin\alpha = \frac{|DF|}{|DG|} = \frac{\frac{x}{2}}{y}$.

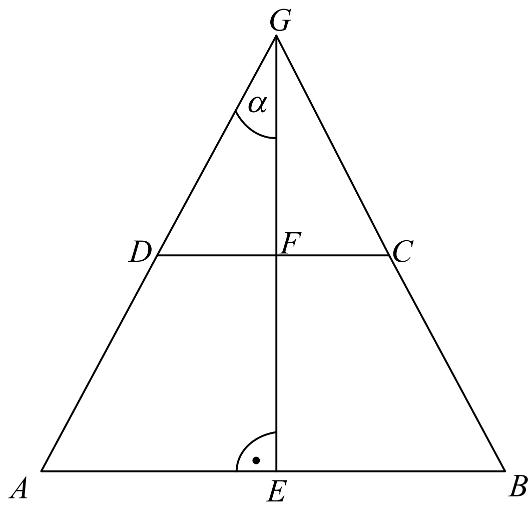
Zdający otrzymuje ....2 punkty

gdy wyznaczy obwód trapezu $O = \frac{2m(\sin\alpha + 2)}{2\sin\alpha + 1}$.

Uwagi

1. Nie wymagamy uzasadnienia podobieństwa trójkątów.
2. Zdający może od razu zapisać proporcję bez stwierdzenia faktu podobieństwa trójkątów.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu x i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
4. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

III sposób rozwiązania



Zauważamy, że trójkąty ABG i DCG są podobne.
Wprowadzamy oznaczenia $|AD| = |BC| = |CD| = x$, $|DG| = |CG| = y$ i $|AB| = m$.

Trójkąty ABG i DCG są podobne, zatem $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|DG|}{|AG|}$. Stąd $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$.

Trójkąt AEG jest prostokątny, zatem $\sin\alpha = \frac{|AE|}{|AG|} = \frac{\frac{m}{2}}{x+y}$. Stąd $y = \frac{\frac{m}{2} - x\sin\alpha}{\sin\alpha}$.

Podstawiamy $y = \frac{\frac{m}{2} - x\sin\alpha}{\sin\alpha}$ do równania $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$ i otrzymujemy $x = \frac{m}{2\sin\alpha + 1}$.

Wyznaczamy obwód trapezu $ABCD$:

$O = |AB| + 3|CD| = m + 3x = m + 3\frac{m}{2\sin\alpha + 1} = \frac{2m\sin\alpha + 4m}{2\sin\alpha + 1} = \frac{2m(\sin\alpha + 2)}{2\sin\alpha + 1}$.

<u>Schemat oceniania III sposób rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 punkt

Gdy zauważy, że trójkąty ABG i DCG są podobne, stąd $\frac{x}{m} = \frac{y}{x+y}$ oraz zauważy, że $\sin\alpha = \frac{|AE|}{|AG|} = \frac{\frac{m}{2}}{x+y}$.

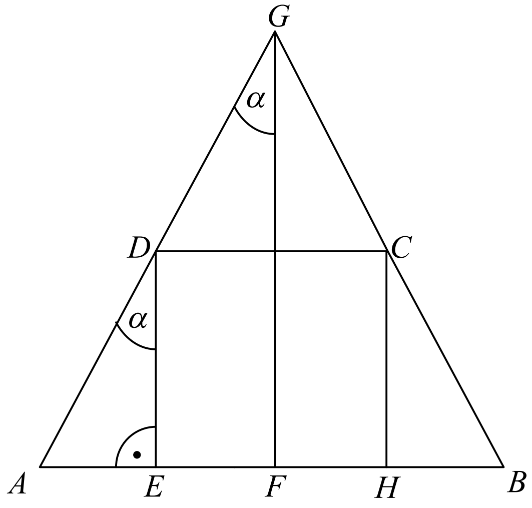
Zdający otrzymuje ....2 punkty

gdy wyznaczy obwód trapezu $O = \frac{2m(\sin\alpha + 2)}{2\sin\alpha + 1}$.

<u>Uwagi</u>

1. Nie wymagamy uzasadnienia podobieństwa trójkątów.
2. Zdający może od razu zapisać proporcję bez stwierdzenia faktu podobieństwa trójkątów.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu x i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
4. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

IV sposób rozwiązania



Wprowadzamy oznaczenia $|AD| = |BC| = |CD| = x$, $|DE| = h$ i $|AB| = m$.

Zauważamy, że trójkąty ADE i AGF są podobne, zatem $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle AGF| = \alpha$.

Trójkąt ADE jest prostokątny, zatem $\cos\alpha = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{h}{x}$ i $\sin\alpha = \frac{|AE|}{|AD|}$. Stąd $|DE| = h = x\cos\alpha$ i $|AE| = x\sin\alpha$.

Zapisujemy pole trapezu $ABCD$ na dwa sposoby:

$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot\left(|AB|+|CD|\right)\cdot|DE|$ i $P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot|DE| + |DC|\cdot|DE| + \frac{1}{2}\cdot|HB|\cdot|CH|$.

Otrzymujemy równanie: $\frac{m+x}{2}\cdot x\cos\alpha = x\cdot x\cos\alpha + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\sin\alpha\cdot x\cos\alpha$.

Po przekształceniach otrzymujemy $x = \frac{m}{1+2\sin\alpha}$.

Wyznaczamy obwód trapezu $ABCD$:

$$O = |AB| + 3|CD| = m + 3x = m + 3\frac{m}{2\sin\alpha+1} = \frac{2m\sin\alpha+4m}{2\sin\alpha+1} = \frac{2m(\sin\alpha+2)}{2\sin\alpha+1}.$$

Schemat oceniania IV sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………1 punkt

gdy zapisze równanie $\frac{m+x}{2}\cdot x\cos\alpha = x\cdot x\cos\alpha + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\sin\alpha\cdot x\cos\alpha$.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………….....2 punkty

gdy wyznaczy obwód trapezu $O = \frac{2m(\sin\alpha+2)}{2\sin\alpha+1}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu x i dalej konsekwentnie obliczy obwód trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
2. Nie wymagamy postaci uporządkowanej w wyznaczonym obwodzie trapezu.

Zadanie 28. (*2 pkt*)
Przemek w czasie ferii zimowych podjął pracę w firmie „Ulotek-express”. Pierwszego dnia rozniósł 900 ulotek, każdego następnego dnia o 40 mniej niż poprzedniego. Za dostarczenie jednej ulotki firma płaci 5 groszy. Jaką kwotę zarobił Przemek w czasie 14 dni pracy?

I sposób rozwiązania
Wyznaczamy różnicę ciągu arytmetycznego $r = -40$, a następnie czternasty wyraz ciągu $a_{14} = 900 + 13 \cdot (-40) = 380$.
Obliczamy sumę czternastu wyrazów tego ciągu (czyli liczbę ulotek, jaką rozniósł Przemek) $S_{14} = 8960$.
Obliczamy jaką kwotę zarobił Przemek: $8960 \cdot 5\,\text{groszy} = 448$ zł.

II sposób rozwiązania
Obliczamy kwotę, którą zarobił Przemek pierwszego dnia: $900 \cdot 5\,\text{groszy} = 45$ zł.
Wyznaczamy różnicę ciągu arytmetycznego $r = -40 \cdot 0{,}05 = -2$, a następnie czternasty wyraz ciągu $a_{14} = 45 + 13 \cdot (-2) = 19$.
Obliczamy sumę czternastu wyrazów tego ciągu (czyli kwotę, jaką zarobił Przemek w czasie 14 dni pracy) $S_{14} = 448$ zł.

III sposób rozwiązania
Wyznaczamy różnicę ciągu arytmetycznego $r = -40$ lub $r = -2$, a następnie bezpośrednio sumę czternastu wyrazów tego ciągu $S_{14} = 8960$ lub $S_{14} = 448$.
Zapisujemy odpowiedź: Przemek zarobił 448 zł.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 punkt

gdy:

- zauważy, że mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym i wyznaczy różnicę tego ciągu i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

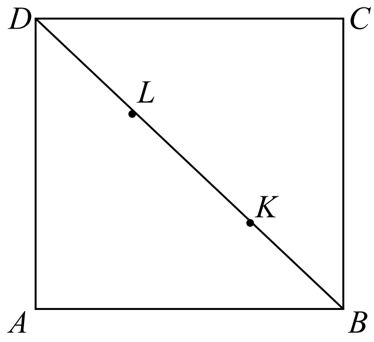
- popełni błąd rachunkowy w wyznaczeniu różnicy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy jaką kwotę zarobił Przemek.

Zdający otrzymuje ....2 punkty
gdy obliczy kwotę jaką w czasie 14 dni pracy: 448 zł.

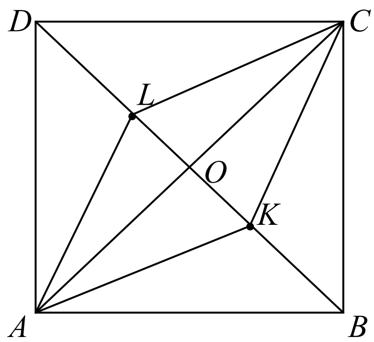
Uwagi
1. Jeśli zdający nie korzysta z własności ciągu, ale zapisze np. $900 + 860 + 820 + ... + 380$ i poprawnie obliczy zarobioną kwotę, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty.**
2. Jeśli zdający nie korzysta z własności ciągu, ale zapisze np. $45 + 43 + 41 + 39 + ... + 19$ i poprawnie obliczy zarobioną kwotę, to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty.**
3. Jeśli zdający nie korzysta z własności ciągu (np. tak jak w uwadze 1 lub 2) i popełni błąd rachunkowy, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów.**
4. Jeśli zdający zapisze poprawną odpowiedź (bez uzasadnienia) to otrzymuje **0 punktów.**

Zadanie 29. (*2 pkt*)

Dany jest kwadrat $ABCD$. Na przekątnej BD obrano dwa różne punkty K i L, takie że $|BK| = |DL|$ (zobacz rysunek). Uzasadnij, że czworokąt $AKCL$ jest rombem.



<u>I sposób rozwiązania</u>



Przekątna BD to dwusieczna kąta prostego, stąd $|\sphericalangle ADL| = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle CBK| = |\sphericalangle ABK| = 45°$.
Z założenia mamy $|DL| = |BK|$ oraz $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$.
Trójkąty ADL, CDL, CBK, ABK są przystające (cecha *bkb*), stąd $|AL| = |CL| = |CK| = |AK|$.
Zatem czworokąt $AKCL$ jest rombem.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………1 punkt

gdy:

- zapisze, że trójkąty ADL, CDL, CBK, ABK są przystające,

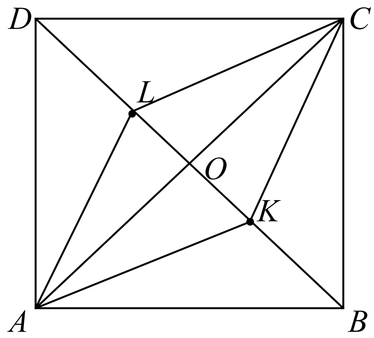
albo

- zaznaczy na rysunku równość odpowiednich boków i kątów w czterech trójkątach ADL, CDL, CBK, ABK

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………2 punkty
gdy uzasadni, że wszystkie boki czworokąta $AKCL$ są równe i zapisze, że czworokąt $AKCL$ jest rombem.

II sposób rozwiązania



Trójkąty AOL, AOK, COK, COL są prostokątne, bo przekątne kwadratu są prostopadłe.
Ponieważ $|DL|=|KB|$, $|OD|=|OB|$ i $|LO|=|OD|-|DL|$ oraz $|OK|=|OB|-|KB|$, zatem $|LO|=|OK|$. Wiemy, że $|AO|=|OC|$.
Trójkąty AOL, AOK, COK, COL są przystające (cecha *bkb*), stąd $|AL|=|CL|=|CK|=|AK|$.
Zatem czworokąt $AKCL$ jest rombem.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………1 punkt

gdy:

- zapisze, że trójkąty AOL, AOK, COK, COL są przystające,

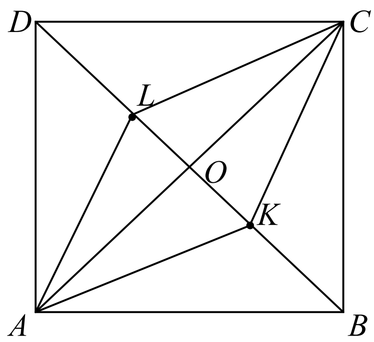
albo

- zaznaczy na rysunku równość odpowiednich boków i kątów w czterech trójkątach ADL, CDL, CBK, ABK

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 punkty
gdy uzasadni, że wszystkie boki czworokąta $AKCL$ są równe i zapisze, że czworokąt $AKCL$ jest rombem.

III sposób rozwiązania



Przekątne czworokąta $AKCL$ pokrywają się z przekątnymi kwadratu, zatem są prostopadłe. Punkt przecięcia przekątnych kwadratu O, dzieli przekątne AC i BD na połowy. Stąd $|OD|=|OB|$ oraz $|AO|=|OC|$.

Z założenia mamy $|DL|=|KB|$.

Dodatkowo $|LO|=|OD|-|DL|$ oraz $|OK|=|OB|-|KB|$, zatem $|LO|=|OK|$.

W czworokącie $AKCL$ przekątne są prostopadłe i punkt ich przecięcia O dzieli je na połowy. Zatem czworokąt $AKCL$ jest rombem.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 punkt

gdy:

- zauważy, że przekątne czworokąta $AKCL$ są prostopadłe i zapisze, że $|AO|=|OC|$,

albo

- zauważy, że przekątne czworokąta $AKCL$ są prostopadłe i zaznaczy na rysunku, że $|AO|=|OC|$,

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

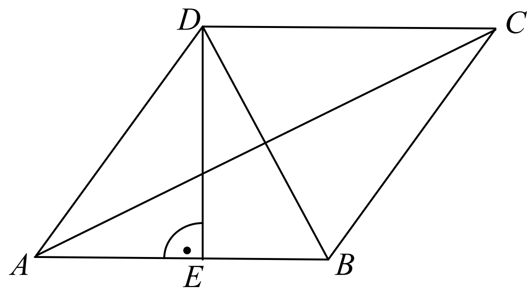
Zdający otrzymuje ....2 punkty

gdy uzasadni, że $|LO|=|OK|$ oraz zapisze, że w czworokącie $AKCL$ przekątne są prostopadłe i ich punkt przecięcia O dzieli je na połowy. Zatem czworokąt $AKCL$ jest rombem.

Zadanie 30. (*2 pkt*)

Dany jest romb $ABCD$ o boku długości 16 i polu powierzchni równym $128\sqrt{3}$. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego rombu.

<u>I sposób rozwiązania</u>



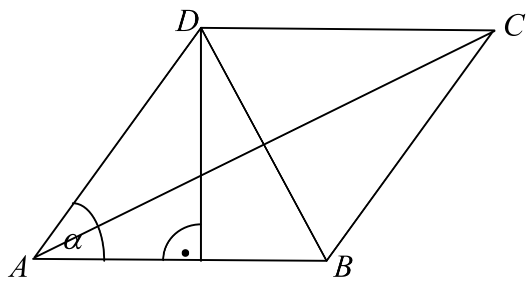
Wprowadzamy oznaczenia $|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=a=16$, $|DE|=h$.

Obliczamy wysokość rombu: $h=\dfrac{128\sqrt{3}}{a}=\dfrac{128\sqrt{3}}{16}=8\sqrt{3}$.

Trójkąt AED jest prostokątny, więc $|AE|^2+h^2=a^2$. Stąd $|AE|=8$. Zatem $|AE|=|EB|$.
$|AB|=|AD|$ i $|AE|=|EB|$ stąd trójkąty AED i EBD są przystające, zatem trójkąt ABD jest równoboczny.

Dłuższa przekątna rombu jest równa $|AC|=2h=16\sqrt{3}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>



Zapisujemy pole rombu za pomocą wzoru $P_{ABCD}=a^2\cdot\sin\alpha$, stąd $128\sqrt{3}=16^2\cdot\sin\alpha$. Zatem $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ i wtedy $\alpha=60°$.

$|AB|=|AD|$ i $\alpha=60°$, zatem trójkąt ABD jest równoboczny.

Dłuższa przekątna jest równa $|AC|=2h=16\sqrt{3}$.

<u>Uwaga</u>

Uczeń może zauważyć, że $P_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\cdot|BD|\cdot|AC|$. Zatem $\dfrac{1}{2}\cdot16\cdot|AC|=128\sqrt{3}$, stąd $|AC|=16\sqrt{3}$.

<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………1 punkt

gdy:

- obliczy długość wysokości rombu $h = 8\sqrt{3}$,

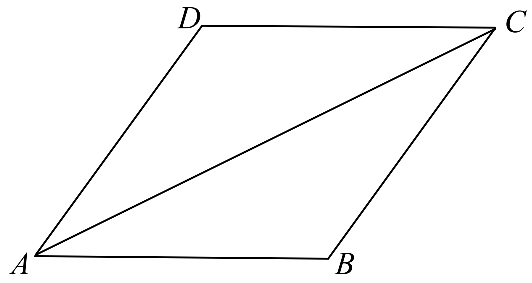
albo

- obliczy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i zauważy że, trójkąt ABD jest równoboczny.

Zdający otrzymuje ....2 punkty

gdy obliczy długość dłuższej przekątnej rombu $|AC| = 16\sqrt{3}$.

<u>III sposób rozwiązania</u>



Zapisujemy pole rombu korzystając ze wzoru $P_{ABCD} = a^2 \cdot \sin\alpha$.

Otrzymujemy równanie $16^2 \cdot \sin\alpha = 128\sqrt{3}$, stąd $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem $\alpha = 60°$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów i zapisujemy

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 120° = a^2 + a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos 120°$, stąd $|AC| = 16\sqrt{3}$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………1 punkt

gdy obliczy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i zapisze $|AC|^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos 120°$.

Zdający otrzymuje ....2 punkty

gdy obliczy długość dłuższej przekątnej rombu $|AC| = 16\sqrt{3}$.

Zadanie 31. (*4 pkt*)
Julia i Dominika mają skarbonki. W skarbonce Julii znajduje się 1 banknot 50 zł, dwa banknoty 20 zł i 3 banknoty 10 zł, natomiast w skarbonce Dominiki znajdują się 2 banknoty 50 zł, 1 banknot 20 zł i 5 banknotów 10 zł. Każda z dziewcząt losuje ze swojej skarbonki jeden banknot. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wartość wylosowanych banknotów przekroczy 38 zł? Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

<u>**I sposób rozwiązania**</u> (metoda klasyczna)
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a,b) takie, że $a \in \{50,20,20,10,10,10\}$, $b \in \{50,50,20,10,10,10,10,10\}$.

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającym na tym, że wartość wylosowanych banknotów przekroczy 38 zł, np. wypisując je i zliczając:
Wypisujemy wszystkie możliwe pary wyboru banknotów:
$A \in \{(50,50),(50,20),(50,20),(50,10),(50,10),(50,10),(50,50),(50,20),(50,20),(50,10),$
$(50,10),(50,10),(20,50),(20,20),(20,20),(10,50),(10,50),(10,50),(10,50),(10,50)\}$, czyli $|A| = 20$.

Stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$.

<u>Uwaga</u>
Uczeń może:

- obliczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A zapisując możliwe układy banknotów: 50 zł i 50 zł lub 50 zł i 20 zł lub 50 zł i 10 zł lub 20 zł i 50 zł lub 20 zł i 20 zł lub 10 zł i 50 zł i stąd $|A| = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 20$,

albo

- obliczyć liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu do zdarzenia A (wartość wylosowanych banknotów nie przekroczy 38 zł). Wystarczy zauważyć, że niemożliwe są układy: 20 zł i 10 zł lub 10 zł i 10 zł lub 10 zł i 20 zł, więc $|A'| = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 = 28$.

  Stąd $P(A') = \frac{28}{48}$. Zatem $P(A) = 1 - \frac{28}{48} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$

  (lub $|A| = |\Omega| - |A'|$, stąd $|A| = 48 - 28 = 20$. Zatem $P(A) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$).

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania……………………………………………………….... 1 punkt

- uczeń zapisze, że $|\Omega| = 6 \cdot 8$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń pokaże metodę zliczania zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A lub zdarzeniu A' i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A lub A' i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……………………………………2 punkty

- uczeń zapisze, że $|\Omega| = 48$ i pokaże metodę zliczania zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A lub zdarzeniu A', np.: $|A| = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 5 + 2\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2$ lub $|A'| = 2\cdot 5 + 3\cdot 5 + 3\cdot 1$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń zapisze, że $|\Omega| = 48$ i wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A lub A' i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………..……………...3 punkty

- uczeń obliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $|A| = 20$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- uczeń obliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $|A'| = 28$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne ……………………………………..…………………………..4 punkty

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zapisanie wyniku w postaci ułamka nieskracalnego $P(A) = \frac{5}{12}$.

<u>II sposób rozwiązania </u>(metoda tabeli)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a,b) takie, że $a \in \{50, 20, 20, 10, 10, 10\}$, $b \in \{50, 50, 20, 10, 10, 10, 10, 10\}$.

Tworzymy tabelę ilustrującą sytuacją opisaną w zadaniu, np.:

	50zł	20 zł	20 zł	10 zł	10 zł	10 zł
50 zł	x	x	x	x	x	x
50 zł	x	x	x	x	x	x
20 zł	x	x	x			
10 zł	x					
10 zł	x					
10 zł	x					
10 zł	x					
10 zł	x					

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6\cdot 8 = 48$.

Zliczamy oznaczone krzyżykami zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A: $|A| = 20$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$.

<u>Uwaga</u>

Uczeń może oznaczyć w tabeli zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu przeciwnemu do zdarzenia A.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania………………………………………………….... 1 punkt

Zdający sporządzi tabelkę przedstawiającą sytuację w zadaniu, np.:

	50zł	20 zł	20 zł	10 zł	10 zł	10 zł
50 zł						
50 zł						
20 zł						
10 zł						
10 zł						
10 zł						
10 zł						
10 zł						

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp………………………………………2 punkty

- uczeń obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 48$ i zaznaczy w tabeli zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzeniu A i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie,

albo

- uczeń obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 48$ i zaznaczy w tabeli zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzeniu A' i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………..……………...3 punkty

- uczeń zliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $|A| = 20$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie,

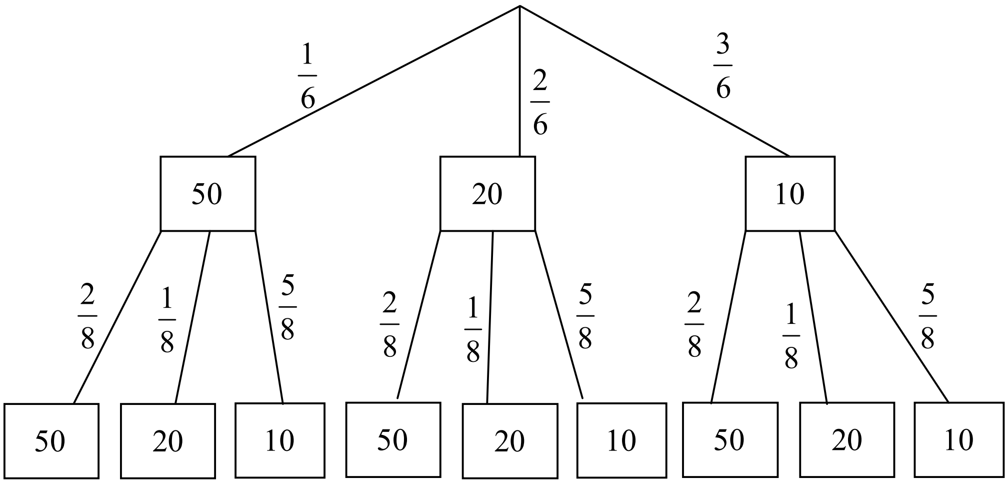
albo

- uczeń zliczy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $|A'| = 28$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie pełne …………………………….……………………………...4 punkty
Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zapisanie wyniku w postaci ułamka nieskracalnego $P(A) = \frac{5}{12}$.

<u>**III sposób rozwiązania**</u> (metoda drzewa)

Rysujemy drzewo uwzględniając tylko istotne gałęzie i zapisujemy na nich prawdopodobieństwo.



Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{8}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2+1+5+4+2+6}{6\cdot 8}=\frac{20}{48}=\frac{5}{12}.$$

<u>**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……………………………………….2 punkty

Uczeń narysuje drzewo uwzględniającego tylko istotne gałęzie i zapisze na nich prawdopodobieństwo.

<u>**Uwaga**</u>

Jeżeli zdający narysuje drzewo uwzględniające tylko istotne gałęzie i nie zapisze na nich prawdopodobieństwa, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………..……………...3 punkty

Uczeń zapisze $P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{8}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{8}$ i nie poda wyniku w postaci ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie pełne ……………………………..…………………………………..4 punkty

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{5}{12}$.

<u>**Uwagi**</u>

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia metodą drzewa i otrzymany wynik podzieli przez 48, to za takie rozwiązanie przyznajemy **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający opuści w rozwiązaniu niektóre gałęzie i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt.**
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy prawdopodobieństwo i błędnie skróci ułamek, np.: $P(A)=\frac{20}{48}=\frac{5}{6}$, to za takie rozwiązanie przyznajemy **3 punkty**.

Zadanie 32. (5 *pkt*)

Punkty o współrzędnych $A=(-2,-8)$, $B=(2,4)$, $C=(-2,2)$ są wierzchołkami trapezu. Ramię trapezu *AD* jest prostopadłe do podstaw *AB* i *CD*. Oblicz współrzędne punktu *D* oraz pole powierzchni tego trapezu.

__**I sposób rozwiązania**__

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej *AB* lub wyznaczamy równanie prostej *AB*:

$a=\frac{4+8}{2+2}=\frac{12}{4}=3$, stąd $y=3(x+2)-8$. Zatem $y=3x-2$.

Wyznaczamy równanie prostej równoległej do prostej *AB*, przechodzącej przez punkt *C*:

$y=3(x+2)+2$, stąd $y=3x+8$.

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej *AB* i przechodzącej przez punkt *A*:
Współczynnik kierunkowy prostej *AB* jest równy 3, stąd współczynnik kierunkowy prostej *AD* jest równy $-\frac{1}{3}$. Zatem prosta *AD* ma równanie $y=-\frac{1}{3}x-\frac{26}{3}$.

Obliczamy współrzędne punktu *D* rozwiązując układ równań $\begin{cases} y=3x+8 \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{26}{3} \end{cases}$.

Punkt *D* ma współrzędne $D=(-5,-7)$.

Obliczamy długości podstaw i wysokość trapezu:

$|AB|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$, $|CD|=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ i $|AD|=\sqrt{10}$.

Obliczamy pole trapezu: $P=\frac{1}{2}\cdot\left(4\sqrt{10}+3\sqrt{10}\right)\cdot\sqrt{10}=35$.

__**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Wyznaczenie równania prostej *AB*: $y=3x-2$.

albo

- Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej *AB*: $a=3$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wyznaczenie równania prostej równoległej do prostej *AB*: $y=3x+8$ i równania prostej prostopadłej do prostej *AB* przechodzącej przez punkt *A*: $y=-\frac{1}{3}x-\frac{26}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktu $D=(-5,-7)$ oraz obliczenie jednej z wielkości:

- długości podstawy trapezu $|AB|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$,

albo

- długości podstawy trapezu $|CD|=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$,

albo

- wysokości trapezu $|AD|=\sqrt{10}$.

Rozwiązanie prawie całkowite .... **4 pkt**

Obliczenie pozostałych dwóch wielkości niezbędnych do obliczenia pola trapezu:

- długości podstawy trapezu $|CD|=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ i wysokości trapezu $|AD|=\sqrt{10}$.

albo

- długości podstawy trapezu $|AB|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$ i wysokości trapezu $|AD|=\sqrt{10}$.

albo

- długości podstaw trapezu $|AB|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$ i $|CD|=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

Obliczenie pola trapezu: $P=35$.

Uwaga

Jeżeli zdający przy obliczaniu współrzędnych punktu *D* lub przy obliczaniu długości podstawy *AB* lub długości podstawy i lub długości wysokości trapezu popełnił błąd nieprzekreślający poprawności rozwiązania np. błąd rachunkowy i z tym błędem poprawnie obliczył pole trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **4punkty.**

II sposób rozwiązania

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej *AB* lub wyznaczamy równanie prostej *AB*:

$a=\frac{4+8}{2+2}=\frac{12}{4}=3$, stąd $y=3(x+2)-8$. Zatem $y=3x-2$.

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej *AB*, przechodzącej przez punkt *C*:

$y=-\frac{1}{3}(x+2)+2$, stąd $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

Prosta prostopadła do *AB* i przechodząca przez punkt *C* przecina prostą *AB* w punkcie *E*.

Obliczamy współrzędne punktu *E* rozwiązując układ równań $\begin{cases} y=3x-2 \\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \end{cases}$.

Punkt *E* ma współrzędne punktu wynoszą $E=(1,1)$.

Obliczamy wysokość trapezu *CE*: $|CE|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$.

Obliczamy długości podstaw trapezu:

$|AB|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$ i $|CD|=|AE|$ lub $|CD|=|AB|-|EB|$ (bo trapez jest prostokątny).

Zatem $|CD|=|AE|=\sqrt{9+81}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ lub $|CD|=4\sqrt{10}-\sqrt{10}=3\sqrt{10}$.

Obliczamy pole trapezu: $P=\frac{1}{2}\cdot\left(4\sqrt{10}+3\sqrt{10}\right)\cdot\sqrt{10}=35$.

Obliczamy współrzędne punktu *D* (porównując wektory $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AD}$). Stąd $[-3,1]=[x_D+2,y_D+8]$. Zatem $x_D+2=-3$ i $y_D+8=1$, czyli $D=(-5,-7)$.

Uwaga
Współrzędne punktu D możemy obliczyć jak poniżej:
Wyznaczamy równanie prostej równoległej do prostej CE i przechodzącej przez punkt A: $y=-\frac{1}{3}(x+2)-8$. Stąd współrzędne punktu $D=\left(x_D,-\frac{1}{3}x_D-\frac{26}{3}\right)$.

$|AD|=|CE|$ więc $\sqrt{(x_D+2)^2+\left(-\frac{1}{3}x_D-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{10}$, stąd $(x_D+2)^2+\frac{1}{9}(x_D+2)^2=10$

Otrzymujemy równanie $(x_D+2)^2=9$, które rozwiązaniem są $x_D=-5$ i $x_D=1$.

Obliczamy drugą współrzędną punktu D: $y_D=-7$ i $y_D=-9$.

Druga para nie spełnia warunków zadania, więc punkt D ma współrzędne: $D=(-5,-7)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Wyznaczenie równania prostej AB: $y=3x-2$.

albo

- Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a=3$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wyznaczenie równania prostej prostopadłej do prostej AB, przechodzącej przez punkt C: $y=-\frac{1}{3}x-\frac{26}{3}$ i wyznaczenie współrzędnych punktu $E=(1,1)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktu $D=(-5,-7)$ oraz obliczenie jednej z wielkości:

- długości podstawy trapezu $|AB|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$,

albo

- długości podstawy trapezu $|CD|=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$,

albo

- wysokości trapezu $|AD|=\sqrt{10}$.

Rozwiązanie prawie całkowite .... 4 pkt

Obliczenie pozostałych dwóch wielkości niezbędnych do obliczenia pola trapezu:

- długości podstawy trapezu $|CD|=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ i wysokości trapezu $|AD|=\sqrt{10}$.

albo

- długości podstawy trapezu $|AB|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$ i wysokości trapezu $|AD|=\sqrt{10}$.

albo

- długości podstaw trapezu $|AB|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$ i $|CD|=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie pola trapezu: $P=35$.

Uwaga
Jeżeli zdający przy obliczaniu współrzędnych punktu D lub przy obliczaniu długości podstawy AB lub długości podstawy i lub długości wysokości trapezu popełnił błąd nieprzekreślający poprawności rozwiązania np. błąd rachunkowy i z tym błędem poprawnie obliczył pole trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **4punkty.**

III sposób rozwiązania
Wyznaczamy równanie prostej AB:
$a = \frac{4+8}{2+2} = \frac{12}{4} = 3$, stąd $y = 3(x+2) - 8$. Zatem $3x - y - 2 = 0$.
Obliczamy wysokość trapezu (wyznaczamy odległość punktu C od prostej AB):

$$h = \frac{|-6-2-2|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Wektor prostopadły do prostej AB ma współrzędne: $\vec{u} = [3t, -t]$, gdzie $t \in R \setminus \{0\}$.

Zatem $h = |\vec{u}| = \sqrt{9t^2 + t^2} = |t| \cdot \sqrt{10}$ i $|t| \cdot \sqrt{10} = \sqrt{10}$, stąd $t = 1$ lub $t = -1$.

Prosta AD na równanie: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -8 - t \end{cases}$.

Otrzymujemy: $x_D = -5$ i $y_D = -7$ lub $x_D = 1$ i $y_D = -9$.
Druga para nie spełnia warunków zadania, więc punkt D ma współrzędne: $D = (-5, -7)$.
Obliczamy długości podstaw trapezu: $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ i $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.
Obliczamy pole trapezu: $P = \frac{1}{2} \cdot \left(4\sqrt{10} + 3\sqrt{10}\right) \cdot \sqrt{10} = 35$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Wyznaczenie równania prostej AB: $3x - y - 2 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Obliczenie wysokości trapezu: $h = \sqrt{10}$ oraz zapisanie współrzędnych wektora prostopadłego do prostej AB w zależności od parametru t: np. $\vec{u} = [3t, -t]$, gdzie $t \in R \setminus \{0\}$ oraz obliczenie wartości t, dla których długość wektora $\vec{u}$ jest równa długości wysokości trapezu.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Wyznaczenie współrzędnych punktu $D = (-5, -7)$ oraz obliczenie długości jednej z podstaw trapezu: $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ albo $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

Rozwiązanie prawie całkowite .... 4 pkt

Obliczenie długości drugiej podstawy trapezu: $|CD| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ albo $|AB| = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie pola trapezu: $P = 35$.

Uwaga

Jeżeli zdający przy obliczaniu współrzędnych punktu D lub przy obliczaniu długości podstawy AB lub długości podstawy i lub długości wysokości trapezu popełnił błąd nieprzekreślający poprawności rozwiązania np. błąd rachunkowy i z tym błędem poprawnie obliczył pole trapezu, to za takie rozwiązanie przyznajemy **4punkty.**

Zadanie 33. (*5 pkt*)
Szkoła zakupiła na raty serwer za kwotę 5400 zł. Będzie go spłacała w równych miesięcznych ratach. Gdyby okres spłaty skrócić o pół roku, wówczas kwota raty wzrosłaby o 75 zł. Jaka była miesięczna wysokość raty i przez jaki okres szkoła spłacała swoje zobowiązania finansowe?

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza liczbę miesięcy spłacania zobowiązania i niech y oznacza wysokość miesięcznej raty.

Zapisujemy układ: $\begin{cases} x\cdot y=5400 \\ (x-6)\cdot(y+75)=5400 \end{cases}$.

Z pierwszego równania wyznaczamy $y=\frac{5400}{x}$ albo $x=\frac{5400}{y}$.

Podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$(x-6)\left(\frac{5400}{x}+75\right)=5400 \text{ albo } \left(\frac{5400}{y}-6\right)(y+75)=5400.$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.:

$$75x^2-450x-32400=0 \text{ lub } x^2-6x-432=0$$

albo

$$-6y^2-450y+405000=0 \text{ lub } -y^2-75y+67500=0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$75x^2-450x-32400=0$
$\Delta=202500+972000=9922500$
$\sqrt{\Delta}=3150$
$x_1=\frac{450-3150}{150}<0$ lub $x_2=\frac{450+3150}{150}=24$

lub

$x^2-6x-432=0$
$\Delta=36+1728=1764$
$\sqrt{\Delta}=42$
$x_1=\frac{6-42}{2}<0$ lub $x_2=\frac{6+42}{2}=24$

albo

$-6y^2-450y+405000=0$
$\Delta=202500+972000=9922500$
$\sqrt{\Delta}=3150$
$y_1=\frac{450-3150}{-12}=225$ lub $y_2=\frac{450+3150}{-12}<0$

lub

$-y^2-75y+67500=0$
$\Delta=5625+270000=275625$
$\sqrt{\Delta}=525$
$y_1=\frac{75-525}{-2}=225$ lub $y_2=\frac{75+525}{-2}<0$

Odrzucamy rozwiązanie nie spełniające warunków zadania i zapisujemy, że $x=24$ i $y=225$.

Odp.: Wysokość miesięcznej raty wynosiła 225 zł, a szkoła spłacała swoje zobowiązanie przez 24 miesiące.

II sposób rozwiązania

Niech a oznacza liczbę lat spłacania zobowiązania i niech b oznacza wysokość rocznej spłaty.

Zapisujemy układ: $\begin{cases} a \cdot b = 5400 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right) \cdot (b + 900) = 5400 \end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy $b = \frac{5400}{a}$ albo $a = \frac{5400}{b}$.

Podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą, np.:

$\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{5400}{a} + 900\right) = 5400$ albo $\left(\frac{5400}{b} - \frac{1}{2}\right)(b + 900) = 5400$.

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.:

$900a^2 - 450a - 2700 = 0$ lub $2a^2 - a - 6 = 0$

albo

$-\frac{1}{2}b^2 - 450b + 4860000 = 0$ lub $-b^2 - 900b + 9720000 = 0$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned} &900a^2 - 450a - 2700 = 0 \\ &\Delta = 202500 + 972000 = 9922500 \\ &\sqrt{\Delta} = 3150 \\ &a_1 = \frac{450 - 3150}{180} < 0 \quad \text{lub} \quad a_2 = \frac{450 + 3150}{1800} = 2 \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} &2a^2 - a - 6 = 0 \\ &\Delta = 1 + 48 = 49 \\ &\sqrt{\Delta} = 7 \\ &a_1 = \frac{1 - 7}{4} < 0 \quad \text{lub} \quad a_2 = \frac{1 + 7}{4} = 2 \end{aligned}$$

albo

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}b^2 - 450b + 4860000 = 0 \\ &\Delta = 202500 + 972000 = 9922500 \\ &\sqrt{\Delta} = 3150 \\ &b_1 = \frac{450 - 3150}{-1} = 2700 \quad \text{lub} \quad b_2 = \frac{450 + 3150}{-1} < 0 \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} &-b^2 - 900b + 9720000 = 0 \\ &\Delta = 810000 + 38880000 = 39690000 \\ &\sqrt{\Delta} = 6300 \\ &b_1 = \frac{900 - 6300}{-2} = 2700 \quad \text{lub} \quad b_2 = \frac{900 + 6300}{-2} < 0 \end{aligned}$$

Odrzucamy rozwiązanie nie spełniające warunków zadania i zapisujemy, że $a = 2$ i $b = 2700$.

Odp.: Wysokość miesięcznej raty wynosiła 225 zł, a szkoła spłacała swoje zobowiązanie przez 2 lata.

<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Wprowadzenie oznaczeń, np.: x – liczba miesięcy spłacania zobowiązania, y – wysokość miesięcznej raty i zapisanie związku między tymi wielkościami $x \cdot y = 5400$.

albo

- Wprowadzenie oznaczeń, np.: x – liczba miesięcy spłacania zobowiązania, y – wysokość miesięcznej raty i zapisanie związku między tymi wielkościami w przypadku skrócenia okresu spłaty np.: $(x-6)\cdot(y+75) = 5400$.

albo

- Wprowadzenie oznaczeń, np.: a – liczba lat spłacania zobowiązania, b – wysokość rocznej spłaty i zapisanie związku między tymi wielkościami $a \cdot b = 5400$.

albo

- Wprowadzenie oznaczeń, np.: a – liczba lat spłacania zobowiązania, b – wysokość rocznej spłaty i zapisanie związku między tymi wielkościami w przypadku skrócenia okresu spłaty np.: $\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot(b+900) = 5400$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y:

$$\begin{cases} x \cdot y = 5400 \\ (x-6)\cdot(y+75) = 5400 \end{cases},$$

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi a i b:

$$\begin{cases} a \cdot b = 5400 \\ \left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot(b+900) = 5400 \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y albo a lub b np.:

- $(x-6)\left(\frac{5400}{x}+75\right) = 5400$ lub $75x^2 - 450x - 32400 = 0$ lub $x^2 - 6x - 432 = 0$

albo

- $\left(\frac{5400}{y}-6\right)(y+75)=5400$ lub $-6y^2-450y+405000=0$ lub $-y^2-75y+67500=0$

albo

- $\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5400}{a}+900\right)=5400$ lub $900a^2-450a-2700=0$ lub $2a^2-a-6=0$

albo

- $\left(\frac{5400}{b}-\frac{1}{2}\right)(b+900)=5400$ lub $-\frac{1}{2}b^2-450b+4860000=0$ lub $-b^2-900b+9720000=0$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą x i nie obliczenie wysokości miesięcznej raty,

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą y i nie obliczenie liczby miesięcy spłacania zobowiązania,

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą a i nie obliczenie wysokości rocznej spłaty,

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą b i nie obliczenie liczby lat spłacania zobowiązania,

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą x lub y albo a lub b i konsekwentne rozwiązanie zadania do końca.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie wysokości miesięcznej raty (225 zł) i podanie okresu spłaty (24 miesiące lub 2 lata).

Uwagi

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda odpowiedź bez uzasadnienia, to za takie rozwiązanie przyznajemy **1 punkt.**