PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

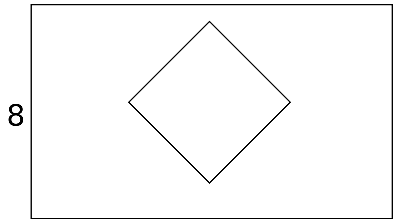
POZIOM ROZSZERZONY

9 MAJA 2009

CZAS PRACY: 180 MINUT

Zadanie 1 (5 pkt.)

W prostokącie, którego krótszy bok ma długość 8 zawarty jest kwadrat o boku równym różnicy długości boków prostokąta, i którego przekątne są równoległe do boków prostokąta.



a) Wyraź pole pozostałe po wycięciu kwadratu z prostokąta jako funkcję dłuższego boku prostokąta. Wyznacz dziedzinę otrzymanej funkcji.

b) Wykaż, że różnica pól prostokąta i kwadratu jest zawsze większa od 64.

ZADANIE 2 (4 PKT.)

Uzasadnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych nieparzystych liczb całkowitych nie może być kwadratem liczby całkowitej.

ZADANIE 3 (4 PKT.)

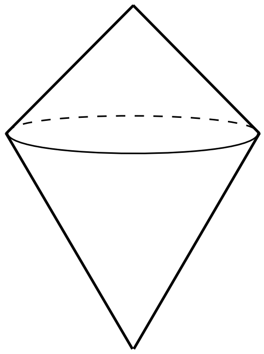
Współrzędne przeciwległych wierzchołków prostokąta $ABCD$ są równe $A = (5, -3)$, $C = (-7, 1)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków prostokąta wiedząc, że wierzchołek B leży na prostej $y = 5$.

ZADANIE 4 (3 PKT.)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $4 + \sin x \cos x - 5\sin^2 x = 4\cos^2 x$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

ZADANIE 5 (4 PKT.)

Boja ma kształt dwóch stożków połączonych podstawami, przy czym kąty rozwarcia tych stożków są równe 60° i 90°, a odległość ich wierzchołków jest równa $\sqrt{3}+1$. Oblicz pole powierzchni tej boi.



Zadanie 6 (5 pkt.)

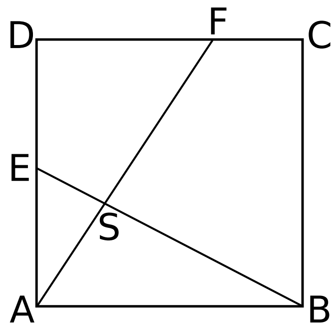
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian

$$W(x) = x^4 - 2x^2 + mx(1+x) - x = 0$$

ma 4 różne pierwiastki.

ZADANIE 7 (6 PKT.)

Na bokach AD i CD kwadratu $ABCD$ o boku długości 1 wybrano punkty E i F w ten sposób, że $AE = \frac{1}{k}$ i $DF = \frac{1}{m}$, dla $k, m \in (1, +\infty)$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE



a) Wykaż, że jeżeli trójkąt ABS jest prostokątny to $k = m$.

b) Oblicz cosinus kąta ASB jeżeli $k = 3$ i $m = 2$.

ZADANIE 8 (5 PKT.)

Dla każdej liczby $n \in \{1,2,\ldots,10\}$ tworzymy funkcję $f_n(x)$, której wykres powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ o wektor $[0,-n]$.

a) Oblicz sumę wszystkich miejsc zerowych funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_{10}$.

b) Wyznacz miejsce zerowe funkcji $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{10}(x)$.

Zadanie 9 (4 pkt.)

Wyznacz iloraz niezerowego ciągu geometrycznego, w którym suma 10 początkowych wyrazów jest 5 razy większa od sumy pierwszych 5 wyrazów.

ZADANIE 10 (5 PKT.)

Wykres funkcji f, określonej dla $x \in \mathbb{R}$ następującym wzorem

$$f(x) = (a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6$$

przecina dodatnią półoś Ox w dwóch różnych punktach.

a) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{|(a-1)(8-a)(a-7)(2a-3)|}{(a-1)(8-a)(a-7)(2a-3)}$.

b) Uzasadnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych $m > n$ spełniona jest nierówność $f(-m^2) > f(-n^2)$.

ZADANIE 11 (5 PKT.)

Na loterii jest n losów, w tym 4 wygrywające. Kupujemy 2 losy. Dla jakiej liczby n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego losu wygrywającego jest równe $\frac{11}{14}$?