

IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia drugiego)

17 stycznia 2009 r.

Szkice rozwiązań

1. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb nieparzystych dodatnich spełniające zależność

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}.$$

Rozwiązanie

Przekształcając równoważnie daną zależność uzyskujemy kolejno:

$$\begin{aligned} ab+bc-b^2 &= ab+ac-a^2, \\ a^2-b^2-ac+bc &= 0, \\ (a-b)(a+b)-(a-b)c &= 0, \\ (a-b)(a+b-c) &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ liczby a , b oraz c są nieparzyste, więc liczba $a+b-c$ jest także liczbą nieparzystą. W szczególności liczba $a+b-c$ jest różna od zera. Wobec tego dana w treści zadania zależność jest równoważna równości $a=b$.

Ostatecznie trójkami (a, b, c) spełniającymi warunki zadania są trójki postaci (a, a, c) , gdzie a , c są dowolnymi liczbami nieparzystymi dodatnimi.

2. Każda z liczb x_1, x_2, \dots, x_{101} jest równa 1 lub -1 . Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1$.

Rozwiązanie

Liczby x_1, x_2, \dots, x_{101} są równe 1 lub -1 , a więc każda z liczb $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{100}x_{101}, x_{101}x_1$ jest też równa 1 lub -1 .

Przypuśćmy, że każda z liczb $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{100}x_{101}, x_{101}x_1$ jest równa -1 . Wówczas

$$-1 = (-1)^{101} = (x_1x_2) \cdot (x_2x_3) \cdot (x_3x_4) \cdot \dots \cdot (x_{100}x_{101}) \cdot (x_{101}x_1) = (x_1x_2 \dots x_{101})^2.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że wśród liczb $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{100}x_{101}, x_{101}x_1$ musi być co najmniej jedna równa 1. Zatem

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1 \geq 100 \cdot (-1) + 1 = -99.$$

Wartość -99 możemy uzyskać przyjmując $x_1 = x_3 = \dots = x_{101} = 1$ oraz $x_2 = x_4 = \dots = x_{100} = -1$. Stąd wynika, że -99 jest najmniejszą możliwą wartością, jaką może przyjąć dane wyrażenie.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC . Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE . Na prostej k obieramy takie punkty K, L , że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury \mathcal{F} .

Równoległobok $ABCD$ oraz trójkąt ADE mają wspólną podstawę AD oraz wysokości równej długości opuszczone na tę podstawę. Wobec tego $[ABCD] = 2[ADE]$.

Podobnie, równoległobok $AEKL$ oraz trójkąt ADE mają wspólną podstawę AE oraz wysokości równej długości opuszczone na tę podstawę. Stąd otrzymujemy $[AEKL] = 2[ADE]$.

Łącząc uzyskane równości dostajemy $[ABCD] = [AEKL]$, co należało wykazać.

4. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taka sytuacja nie jest możliwa.

Przyjmijmy, że każdy zawodnik wygrał k meczów. Wówczas liczba wszystkich meczów wygranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi $50k$.

Z drugiej strony każdy zawodnik przegrał dokładnie $49 - k$ meczów. Zatem liczba wszystkich meczów przegranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi $50(49 - k)$.

Wobec tego $50k = 50(49 - k)$, skąd obliczamy $k = 49/2$. Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy rozwiązanie zadania.

5. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina wszystkie jego krawędzie boczne. W przekroju otrzymano sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykaż, że proste AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Niech P oznacza punkt przecięcia prostej zawierającej wysokość danego ostrosłupa z płaszczyzną sześciokąta $ABCDEF$. Wykażemy, że punkt P leży na każdej z prostych AD , BE , CF . Punkt P jest wówczas punktem wspólnym prostych AD , BE i CF .

Niech S oznacza wierzchołek danego ostrosłupa. Ponieważ ostrosłup jest prawidłowy, więc wysokość tego ostrosłupa leży w płaszczyźnie ADS . Wobec tego prosta zawierająca wysokość ostrosłupa przecina prostą AD . Stąd wynika, że punkt P leży na prostej AD .

Analogicznie dowodzimy, że punkt P leży na prostych BE i CF , co kończy rozwiązanie zadania.
