Kujawsko-Pomorskie Centrum Edukacji Nauczycieli w Bydgoszczy
PLACÓWKA AKREDYTOWANA

Sponsorem wydruku schematu odpowiedzi jest wydawnictwo

KRYTERIA OCENIANIA – POZIOM ROZSZERZONY

Katalog zadań – poziom rozszerzony

Nr zadania	Umiejętność	Nr treści	Standard
1.	Stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym	R7c	IV
2.	Rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne. Rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski	R6e R3b	IV
3.	Wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x-a$; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$	R2b	IV
4.	Potrafi naszkicować wykres będący efektem wykonania kilku operacji.	R4c	IV
5.	Stosuje wzór na n - ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego	5c	III
6.	Stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu	R1b	IV
7.	Wyznacza przekroje wielościanów płaszczyzną	R9a	IV
8.	Stosuje wektory do rozwiązywania zadań, a także do dowodzenia własności figur	R8g	V
9.	Wykorzystuje sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń, Wykorzystuje własności prawdopodobieństwa	10c 10d	V
10.	Rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną	R3e	III
11.	Znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów	R7d	IV
12.	Rozkłada wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia	2b	IV

Zadanie 1. (5 pkt)

W jednokładności o środku S i skali k obrazem okręgu o równaniu $(x+3)^2+(y+1)^2=1$ jest okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y-2)^2=9$. Oblicz współrzędne środka S jednokładności.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Ustalenie skali podobieństwa okręgów: $k=3$.
2pkt	Zapisanie związku między wektorami: $\overrightarrow{SO_2}=k\cdot\overrightarrow{SO_1}$, gdzie $O_2=(3,2), O_1=(-3,-1)$.
3 pkt	Ustalenie związku przy skali jednokładności 3: $[3-x; 2-y]=3[-3-x; -1-y]$
4 pkt	Ustalenie związku przy skali jednokładności -3: $[3-x; 2-y]=-3[-3-x; -1-y]$
5 pkt	Obliczenie środka jednokładności: $S=\left(-6; -\frac{5}{2}\right)$ lub $S=\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

Zadanie 2. (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru α suma kwadratów różnych pierwiastków równania
$x^2-2xsin\alpha-cos^2\alpha=0$ jest równa 3?

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Zapisanie warunku na istnienie różnych pierwiastków $(-2sin\alpha)^2+4cos^2\alpha>0$ i zauważenie, że dla każdego $\alpha\in R$ równanie ma dwa różne pierwiastki.
2pkt	Zapisanie sumy kwadratów różnych pierwiastków równania w postaci $${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2-2ac}{a^2}=(-2sin\alpha)^2-2(-cos^2\alpha)$$ $$=4sin^2\alpha+2cos^2\alpha=2sin^2\alpha+2$$
3 pkt	Zapisanie równania $2sin^2\alpha+2=3$ i doprowadzenie do postaci: $sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4 pkt	Wyznaczenie wartości parametru $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in C$.

Zadanie 3. (4 pkt)

Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumiany $(x-1)$, $(x+2)$, $(x-3)$ daje reszty odpowiednio równe $5\,, 2,\ 27$. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Rozkład wielomianu$P(x)$ na czynniki: $P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$.
2 pkt	Zapisanie warunków zadania $R(1) = 5, R(-2) = 2, R(3) = 27$
3 pkt	Stwierdzenie, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ ma postać $R(x) = ax^2 + bx + c$ i zapisanie $\begin{cases} a+b+c = 5 \\ 4a-2b+c = 2 \\ 9a+3b+c = 27 \end{cases}$
4 pkt	Rozwiązanie układu równań: $a = 2, b = 3, c = 0$ i podanie odpowiedzi $P(x) = 2x^2 + 3x$.

Uwaga

1. Jeżeli uczeń skorzysta z twierdzenia o rozkładzie wielomianu i zapisze: $W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$ i na tym zakończy – otrzymuje 0 pkt.
2. Jeżeli uczeń skorzysta z twierdzenia o rozkładzie wielomianu i zapisze: $W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$, następnie podstawi $x = 1, x = -2, x = 3$ otrzymując $W(1) = R(1), W(-2) = R(-2), W(3) = R(3)$ – otrzymuje 1 pkt.

Zadanie 4. (4 pkt)

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{|x^2-4|}{2-|x|}$, a następnie określ, dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Wyznaczenie przedziałów na osi liczbowej: $(-\infty,-2), (-2,0), \langle 0,2), (2,\infty)$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji.
2 pkt	Wyznaczenie wzoru funkcji w poszczególnych przedziałach; $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in (-\infty,-2) \\ -x+2, & x \in (-2,0) \\ x+2, & x \in \langle 0,2) \\ -x-2, & x \in (2,\infty) \end{cases}$
3 pkt	Narysowanie wykresu funkcji z uwzględnieniem przedziałów.
4 pkt	Podanie wartości m, dla których równanie nie ma rozwiązania $m \in \langle -4,2) \cup \langle 4,\infty)$.

Uwaga

1. Jeśli uczeń błędnie wyznaczy przedziały na osi liczbowej (może wyznaczyć przedziały bez uwzględnienia dziedziny) - 0 punktów.
2. Jeśli uczeń poprawnie opuści wartość bezwzględną, ale nie doprowadzi wzoru funkcji do najprostszej postaci - otrzymuje 2 punkty.
3. Jeśli uczeń narysuje wykres funkcji bez uwzględnienia dziedziny $x \neq 2 \; i \; x \neq -2$, to otrzymuje 2 punkty.
4. Jeśli uczeń narysuje wykres funkcji bez uwzględnienia dziedziny i poda poprawnie dla swojego wykresu wartości parametru m, otrzymuje 3 punkty.

Zadanie 5. (5 pkt)

W ciągu arytmetycznym wyraz pierwszy jest równy 1, a ostatni −15. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu, jeśli wiadomo że drugi, trzeci i szósty są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Zapisanie wzoru na drugi, trzeci i szósty wyraz ciągu arytmetycznego: $a_2 = 1 + r, \quad a_3 = 1 + 2r, \quad a_6 = 1 + 5r$ i zależności dotyczącej ciągu geometrycznego: $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_6}{a_3}$.
2 pkt	Zapisanie równania z jedną niewiadomą: $\frac{1+2r}{1+r} = \frac{1+5r}{1+2r}$; gdzie $r \in R \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$ i rozwiązanie: $r = 0$ lub $r = -2$.
3 pkt	Odrzucenie rozwiązania $r = 0$.
4 pkt	Obliczenie ilości wyrazów ciągu: $n = 9$.
5 pkt	Obliczenie sumy wszystkich wyrazów: $S_9 = -63$.

Uwaga

1. Uczeń musi zapisać zależności dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego żeby otrzymać 1 pkt.
2. Jeśli uczeń popełnia błąd przy zależności dotyczącej ciągu arytmetycznego lub geometrycznego, to za rozwiązanie zadania otrzymuje 0 pkt.
3. Jeśli uczeń nie odrzuci rozwiązania $r = 0$, ale w dalszej części rozwiązania zadania dochodzi do sprzeczności i poprawnie oblicza sumę, to otrzymuje 5 pkt.

Zadanie 6. (4 pkt)

Wiedząc, że $log_c m = 2,\ log_b m = 5,\ log_a m = 10$ oblicz $log_{abc} m$.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Skorzystanie ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu: $log_{abc}m = \frac{1}{log_m abc}$.
2 pkt	Wykorzystanie twierdzenia o logarytmie z iloczynu i zapisanie $log_{abc}m = \frac{1}{log_m abc} = \frac{1}{log_m a + log_m b + log_m c}$.
3 pkt	Skorzystanie ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu i zapisanie wyrażenia w postaci: $\frac{1}{\frac{1}{log_a m}+\frac{1}{log_b m}+\frac{1}{log_c m}}$.
4 pkt	Obliczenie wartości wyrażenia: $log_{abc}m = \frac{5}{4}$.

Zadanie 7. (5 pkt)

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy równej a i wysokości dwa razy dłuższej od podstawy, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem miary $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Prawidłowa interpretacja treści zadania - uczeń rozpatruje wszystkie możliwe przypadki: Przypadek 1. Jeżeli $\alpha \in (0, \beta)$, gdzie $tg\beta = 2\sqrt{2}$ - przekrój jest trójkątem równoramiennym. Przypadek 2. Jeżeli $\alpha \in \left(\beta, \frac{\pi}{2}\right)$, gdzie $tg\beta = 2\sqrt{2}$ - przekrój jest trapezem równoramiennym. Przypadek 3. Jeżeli $\alpha = \frac{\pi}{2}$ - przekrój jest prostokątem.
3 pkt	Przypadek 1. Obliczenie wysokości przekroju: $h = \frac{a\sqrt{2}}{2cos\alpha}$. Przypadek 2. Obliczenie wysokości przekroju $h = \frac{2a}{sin\alpha}$.
4 pkt	Wyznaczenie górnej podstawy trapezu: $a\left(\sqrt{2} - \frac{4}{tg\alpha}\right)$.
5 pkt	Obliczenie pól przekrojów: Przypadek 1. $P = \frac{a^2}{2cos\alpha}$. Przypadek 2. $P = \frac{2\sqrt{2}a^2}{sin\alpha} - \frac{4a^2}{tg\alpha \cdot sin\alpha} = \frac{2a^2(\sqrt{2}tg\alpha - 2)}{sin\alpha(1 - tg\alpha)}$. Przypadek 3. $P = 2\sqrt{2}a^2$.

Uwaga

1. Uczeń nie musi podawać warunków jakie musi spełniać kąt α.
2. Jeżeli uczeń bezbłędnie rozpatruje tylko przypadek 1 – otrzymuje 2 pkt.
3. Jeżeli uczeń bezbłędnie rozpatruje tylko przypadek 2 – otrzymuje 3 pkt.
4. Jeżeli uczeń bezbłędnie rozpatruje tylko przypadek 3 – otrzymuje 1 pkt.
5. Jeżeli uczeń bezbłędnie rozpatruje przypadek 1 i przypadek 3, nie uwzględniając przypadku 2 – otrzymuje 3 pkt.
6. Jeżeli uczeń bezbłędnie rozpatruje tylko przypadek 2 i przypadek 3, nie uwzględniając przypadku 1 – otrzymuje 4 pkt.
7. Jeżeli uczeń bezbłędnie rozpatruje tylko przypadek 1 i przypadek 2, nie uwzględniając przypadku 3 – otrzymuje 4 pkt.
8. W przypadku 2. górna postawa trapezu może być zapisana w postaci $a\left(\sqrt{2} - 4ctg\alpha\right)$ lub tożsamościowej. Uczeń może zapisać pole w postaci: $P = \frac{2a^2(\sqrt{2}-2ctg\alpha)}{sin\alpha}$ lub tożsamościowej.

Zadanie 8. (4 pkt)

Udowodnij, że jeżeli punkt D jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, to $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Zdający otrzymuje:

1pkt	Zauważenie, że środek ciężkości trójkąta jest punktem przecięcia środkowych.
2 pkt	Przedstawienie wektorów $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ w postaci sumy odpowiednich wektorów.
3 pkt	Dodanie stronami i wykorzystanie własności środka ciężkości i wektorów przeciwnych.
4 pkt	Przekształcenie otrzymanego związku i doprowadzenie do tezy.

Zadanie 9. (4 pkt)

Wykaż, że jeżeli A, B są podzbiorami Ω oraz $P(A) < \frac{4}{7}, P(A \cap B) > \frac{3}{8}$, to $P(A \cap B') < \frac{1}{5}$.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Zapisanie zbioru $A \cap B'$ w postaci $A \backslash B$.
2 pkt	Zapisanie zbioru A w postaci sumy zbiorów rozłącznych $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ oraz zapisanie zależności między prawdopodobieństwami: $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$.
3 pkt	Skorzystanie z założenia i zapisanie $P(A \cap B') = P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) < \frac{4}{7} - P(A \cap B) < \frac{4}{7} - \frac{3}{8} = \frac{11}{56}$
4 pkt	Wykazanie tezy: $P(A \cap B') = \frac{11}{56} < \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$

Uwaga

1. Jeżeli uczeń zauważy, że $P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$ i zapisze, że zbiory $(A \cap B')$, $(A \cap B)$ są rozłączne, to otrzymuje 2 pkt.

Zadanie 10. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2|x + 3| + x + 7 = 0$.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Przedstawienie $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ jako $\lvert x - 1\rvert$.
2 pkt	Zastosowanie własności wartości bezwzględnej i zapisanie równania w przedziałach : $x \in (-\infty, -3): -x + 1 + 2(x + 3) + x + 7 = 0$ $x \in \langle -3,1): \quad -x + 1 - 2(x + 3) + x + 7 = 0$ $x \in \langle 1, \infty): \quad x - 1 - 2(x + 3) + x + 7 = 0$
3 pkt	Rozwiązanie każdego z trzech otrzymanych równań.
4 pkt	Rozwiązanie równania w każdym z przedziałów (uwzględnienie przynależności x do przedziału): $x = -7$ oraz $x \in \langle 1, \infty)$.

Uwaga.

1. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiąże równanie tylko w jednym z przedziałów, to otrzymuje 1 pkt.
2. Jeżeli uczeń poprawnie zapisze postać równania tylko w dwóch przedziałach i go w nich rozwiąże, to otrzymuje 2 pkt

Zadanie 11. (4 pkt)

Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg. Wiadomo, że $|AB| = |BC|$, $|AD| = 2\sqrt{3}$, $|DC| = 3 - \sqrt{3}$ oraz przekątna $|AC| = 3\sqrt{2}$. Oblicz pole tego czworokąta.

Zdający otrzymuje:

2 pkt	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ACD i wyznaczenia miary kąta ADC: 120°.
3 pkt	Skorzystanie z własności czworokąta wpisanego w okrąg i zauważenie, że trójkąt ABC jest równoboczny.
4 punkty	Obliczenie pola czworokąta $ABCD$: $P = \frac{9+6\sqrt{3}}{2}$

Uwaga

1. Jeśli uczeń źle zastosuje twierdzenie cosinusów - otrzymuje 0 pkt.

2. Jeśli uczeń popełni błąd rachunkowy przy przekształcaniu twierdzenia cosinusów, to za całe zadanie otrzymuje 1 pkt.
3. Jeśli uczeń poprawnie obliczy kąt przy wierzchołku D i tylko zapisze zależność dotyczącą czworokąta wpisanego w okrąg, a nie zauważy, że trójkąt ABC jest równoboczny i na tym zakończy zadanie - otrzymuje 2 pkt.
4. Jeśli uczeń nie zapisze, że trójkąt ABC jest równoboczny, ale poprawnie obliczy pole czworokąta $ABCD$ - otrzymuje 4 pkt.

Zadanie 12. (3 pkt)

Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 12x - 9$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i tak, aby współczynniki przy drugich potęgach były równe jeden.

Schemat I

Zdający otrzymuje:

1 punkt	Zapisanie wielomianu w postaci $W(x) = (x^4 + 6x^3 + 9x^2) - (4x^2 - 12x + 9)$
2 punkty	Doprowadzenie do postaci $W(x) = (x^2 + 3x)^2 - (2x - 3)^2$
3 punkty	Zapisanie wielomianu w postaci $W(x) = (x^2 + x + 3)(x^2 + 5x - 3)$

Schemat II

Zdający otrzymuje:

1 punkt	Zapisanie wielomianu w postaci $W(x) = (x^2 + bx + c)(x^2 + dx + e)$
2 punkty	Zapisanie układu równań $\begin{cases} b + d = 6 \\ e + bd + c = 5 \\ be + cd = 12 \\ ce = -9 \end{cases}$
3 punkty	Wyznaczenie $\begin{cases} b = 1 \\ c = 3 \\ d = 5 \\ e = -3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} b = 5 \\ c = -3 \\ d = 1 \\ e = 3 \end{cases}$ I zapisanie wielomianu w postaci $W(x) = (x^2 + x + 3)(x^2 + 5x - 3)$