PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

18 MARCA 2023

CZAS PRACY: 180 MINUT

ZADANIE 1 (2 PKT)

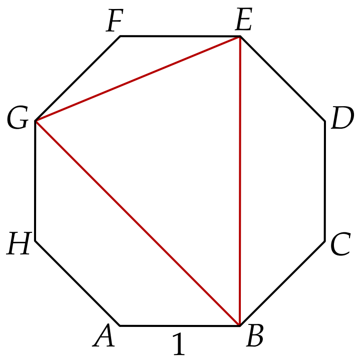
Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to -3} \frac{-0,5x^2+x+7,5}{x^3+4x^2+4x+3}$

Zadanie 2 (3 pkt)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

Informacja do zadań 3.1 i 3.2

Dany jest ośmiokąt foremny $ABCDEFGH$ o boku długości 1.



ZADANIE 3.1 (4 PKT)

Udowodnij, że pole trójkąta BEG jest równe $\frac{1}{2\sqrt{34-24\sqrt{2}}}$.

Zadanie 3.2 (3 pkt)

Niech T będzie środkiem odcinka BG. Oblicz długość odcinka ET.

ZADANIE 4 (5 PKT)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Czwarty wyraz tego ciągu jest o $\frac{7}{4}$ większy od drugiego wyrazu i jest mniejszy niż trzeci wyraz. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa $\left(-\frac{64}{7}\right)$. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{1}{S - S_n}\right| > 7,$$

gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n), a S jest sumą wszystkich wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

Zadanie 5 (3 pkt)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x mniejszej od -1 i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2 - 12xy + 18y^2 - 6x - 9 > 0$.

ZADANIE 6 (6 PKT)

Prosta k o równaniu $x+y+8=0$ przecina parabolę o równaniu $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x-\frac{5}{4}$ w punktach A oraz B. Pierwsza współrzędna punktu A jest liczbą ujemną; pierwsza współrzędna punktu B jest liczbą dodatnią. Prosta l jest równoległa do prostej k i styczna do danej paraboli w punkcie C. Oblicz odległość punktu C od prostej k oraz pole trójkąta ABC.

ZADANIE 7 (4 PKT)

Rozwiąż równanie

$$2\cos x + \cos(3x) = 0$$

w zbiorze $[-\pi, \pi]$.

ZADANIE 8 (4 PKT)

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przecinające boki AB i AC tego trójkąta w punktach – odpowiednio – L i K. Punkt P jest punktem przecięcia tych dwusiecznych. Długości boków trójkąta ABC spełniają warunki: $|AB| + |AC| = 1$ oraz

$$|BC|^2 + 3|AC| = 3|AC|^2 + 1.$$

Udowodnij, że punkt A leży na okręgu opisanym na trójkącie KLP.

Zadanie 9 (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$mx^2 - (m+1)x + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 \geqslant \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

Zadanie 10 (7 pkt)

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, w którym tangens jednego z kątów ostrych jest równy $m > 0$. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość $b > 0$. Jakie powinno być pole podstawy ostrosłupa, aby jego objętość była największa? Oblicz tę największą objętość.

ZADANIE 11 (4 PKT)

Wśród studentów, którzy przystąpili do egzaminu z matematyki dokładnie jedna trzecia nie znała odpowiedzi na pierwsze pytanie. Egzaminator wybrał z tej grupy studentów 10 osób. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród tych wybranych 10 osób więcej niż połowa zna odpowiedź na pierwsze pytanie.