

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

ZADANIA.INFO

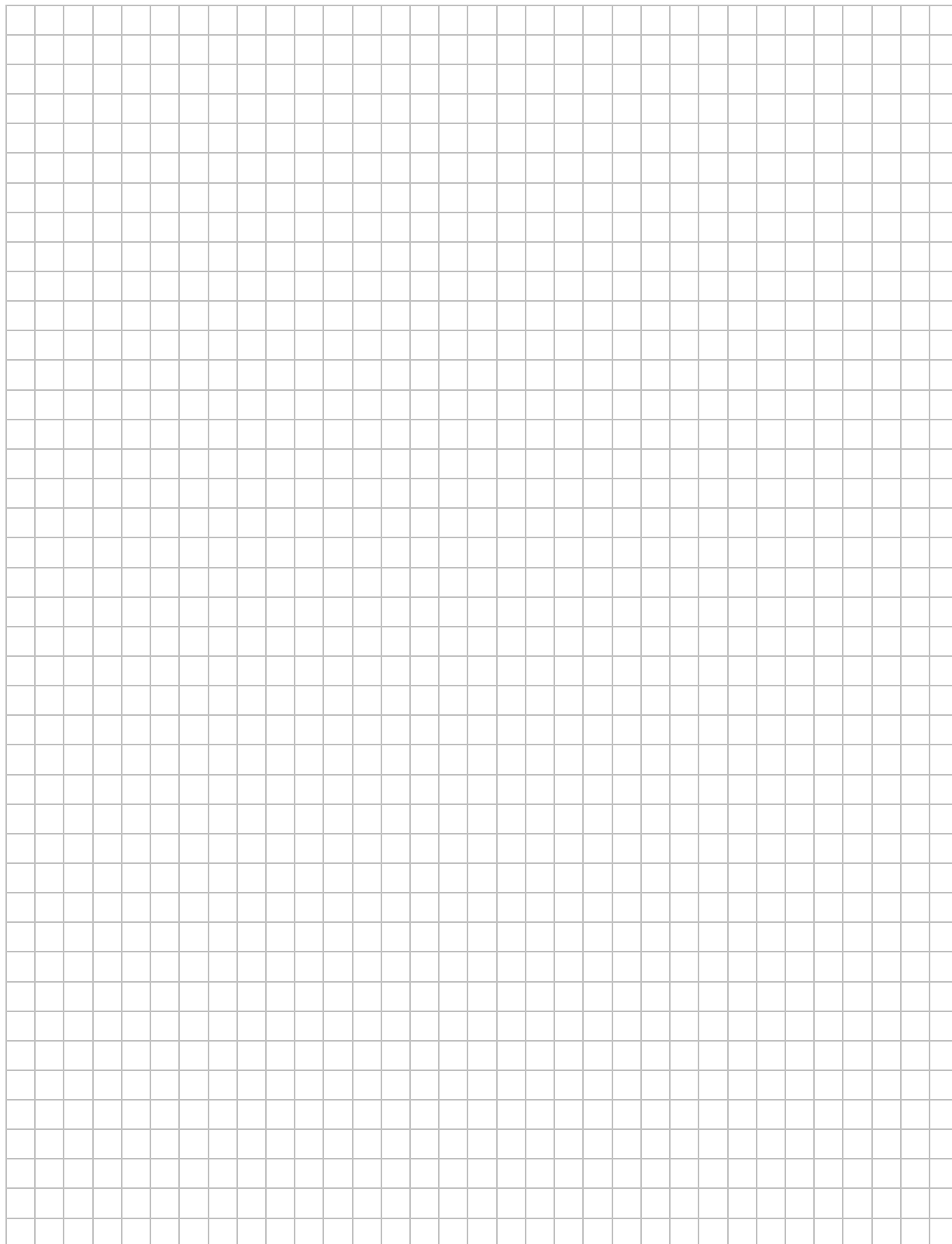
POZIOM ROZSZERZONY

6 KWIETNIA 2024

CZAS PRACY: 180 MINUT

ZADANIE 1 (2 PKT)

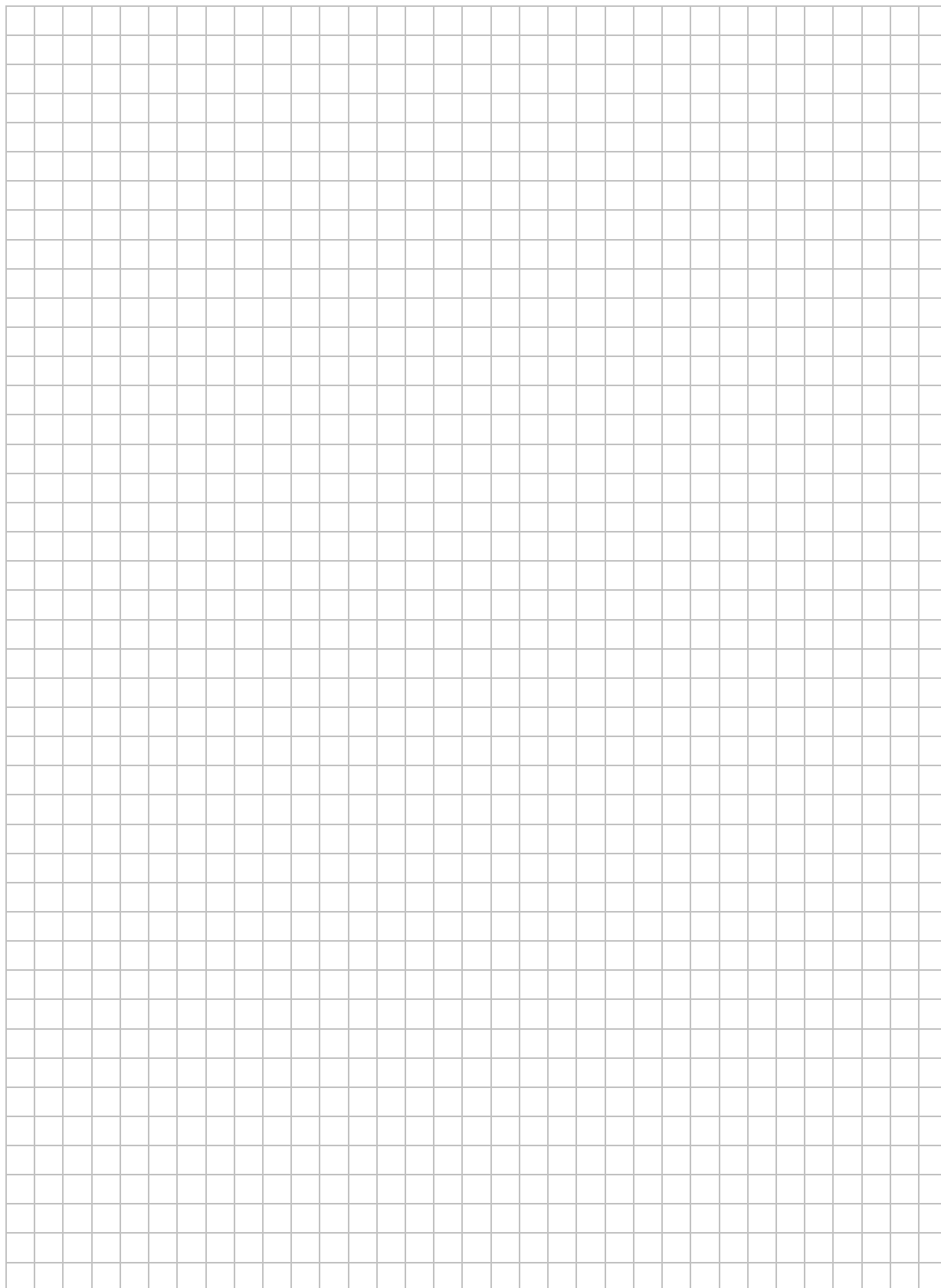
W chwili początkowej ($t = 0$) masa substancji jest równa 12 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 21% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej). Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, przez ile pełnych dób masa tej substancji będzie przekraczać 3 gramy.



ZADANIE 2 (3 PKT)

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność

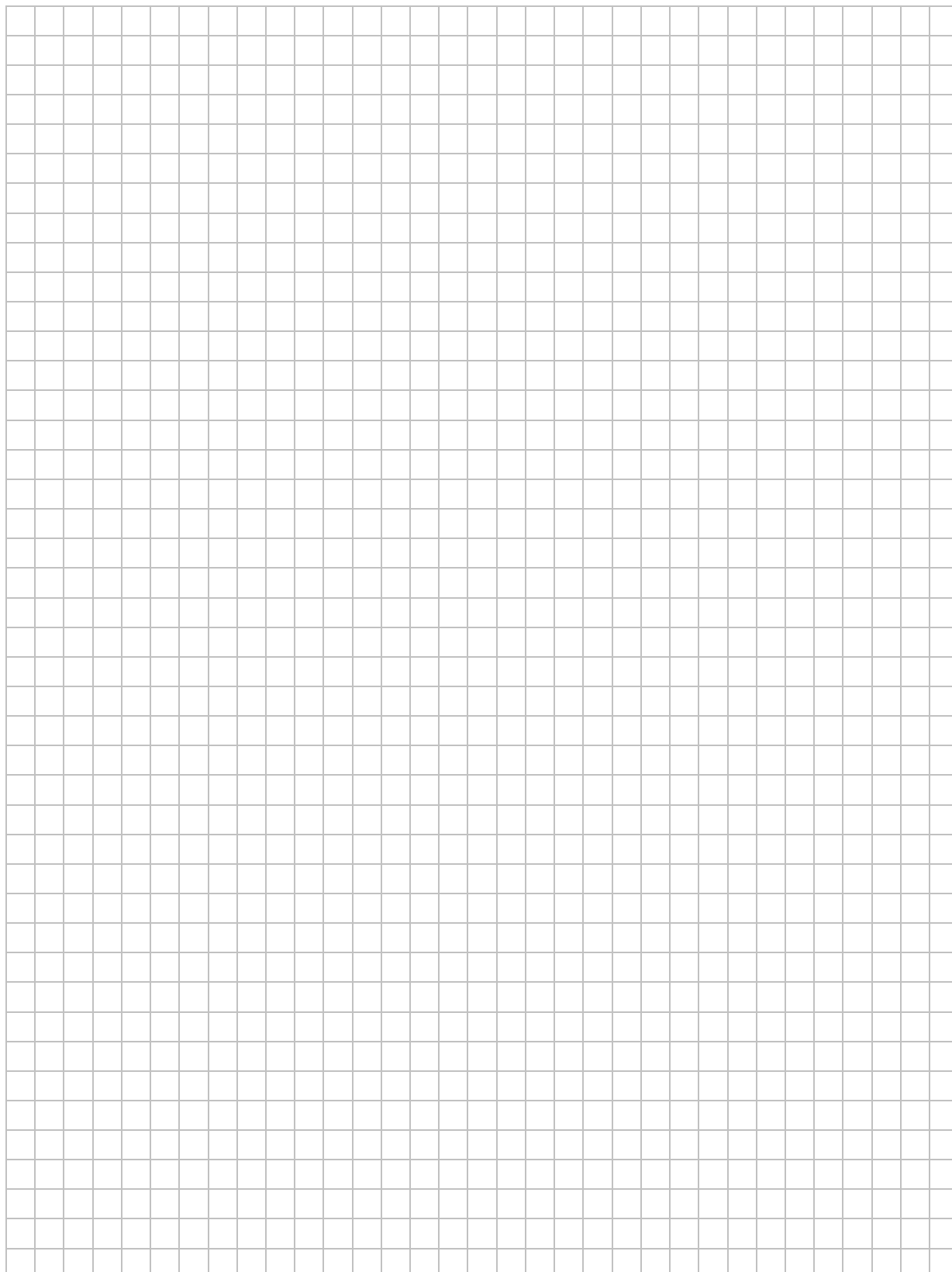
$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{xy}} \cdot \sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{xy}} - \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{xy}.$$



ZADANIE 3 (3 PKT)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem

$$a_n = \left((\log_2 n)^{-1} + (\log_3 n)^{-1} + \dots + (\log_{19} n)^{-1} + (\log_{20} n)^{-1} \right)^{-1}, \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Oblicz sumę 19 początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

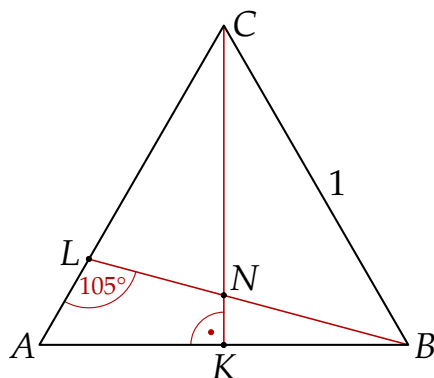
ZADANIE 4 (3 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 16x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Punkt $P = (x_0, 24)$ należy do wykresu funkcji f . Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

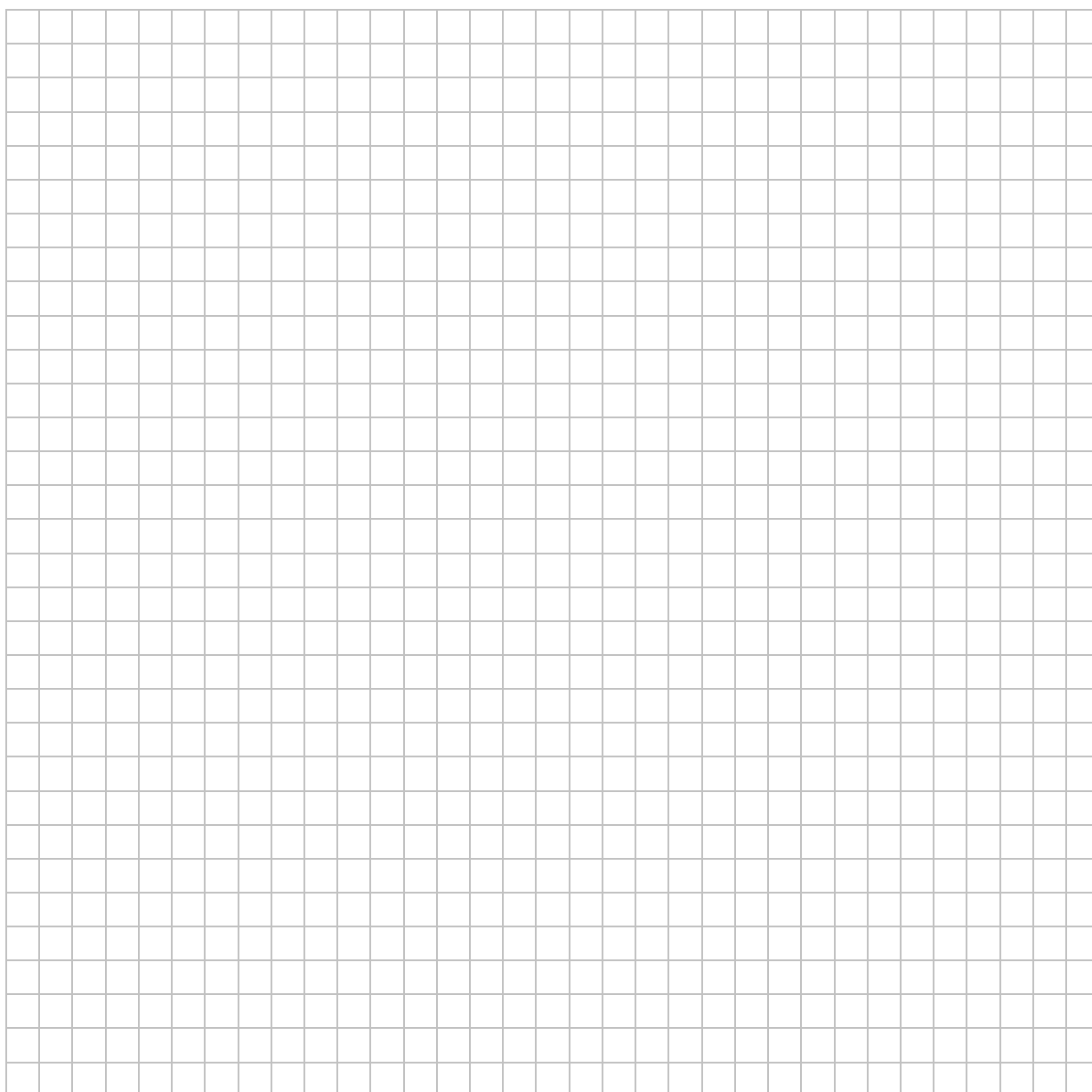


ZADANIE 5 (4 PKT)

Dany jest trójkąt równoboczny ABC , w którym $|AB| = 1$. Na boku AC tego trójkąta wybrano taki punkt L , że $|\angle BLA| = 105^\circ$. Odcinek BL przecina wysokość CK trójkąta ABC w punkcie N (zobacz rysunek).

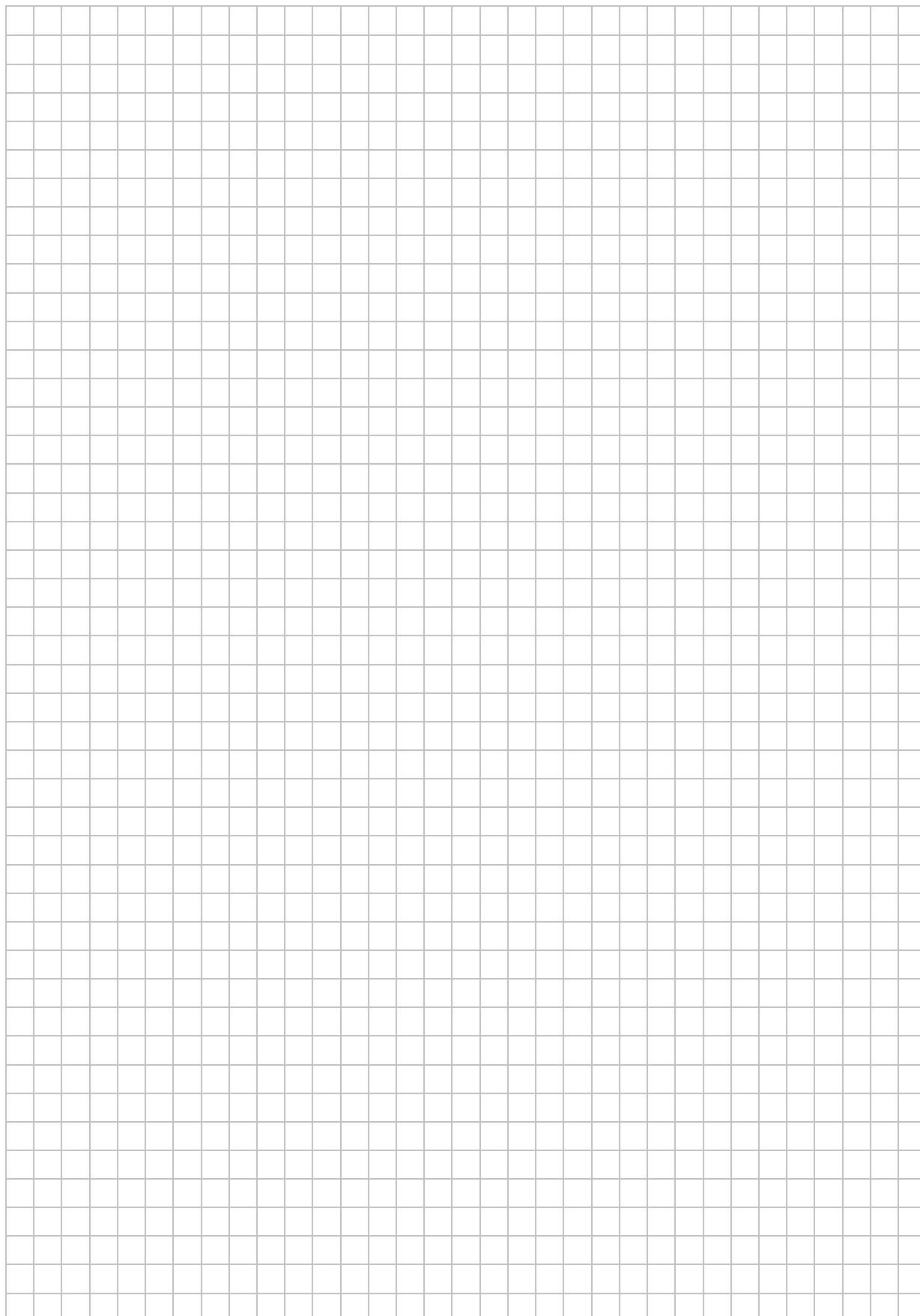


Oblicz długość odcinka CN .



ZADANIE 6 (3 PKT)

O zdarzeniach losowych A , B wiadomo, że: $P(A \cup B) = 0,7$, $P(B) = 0,3$ i $P(A|B) = 0,5$.
Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $P(B|A)$.

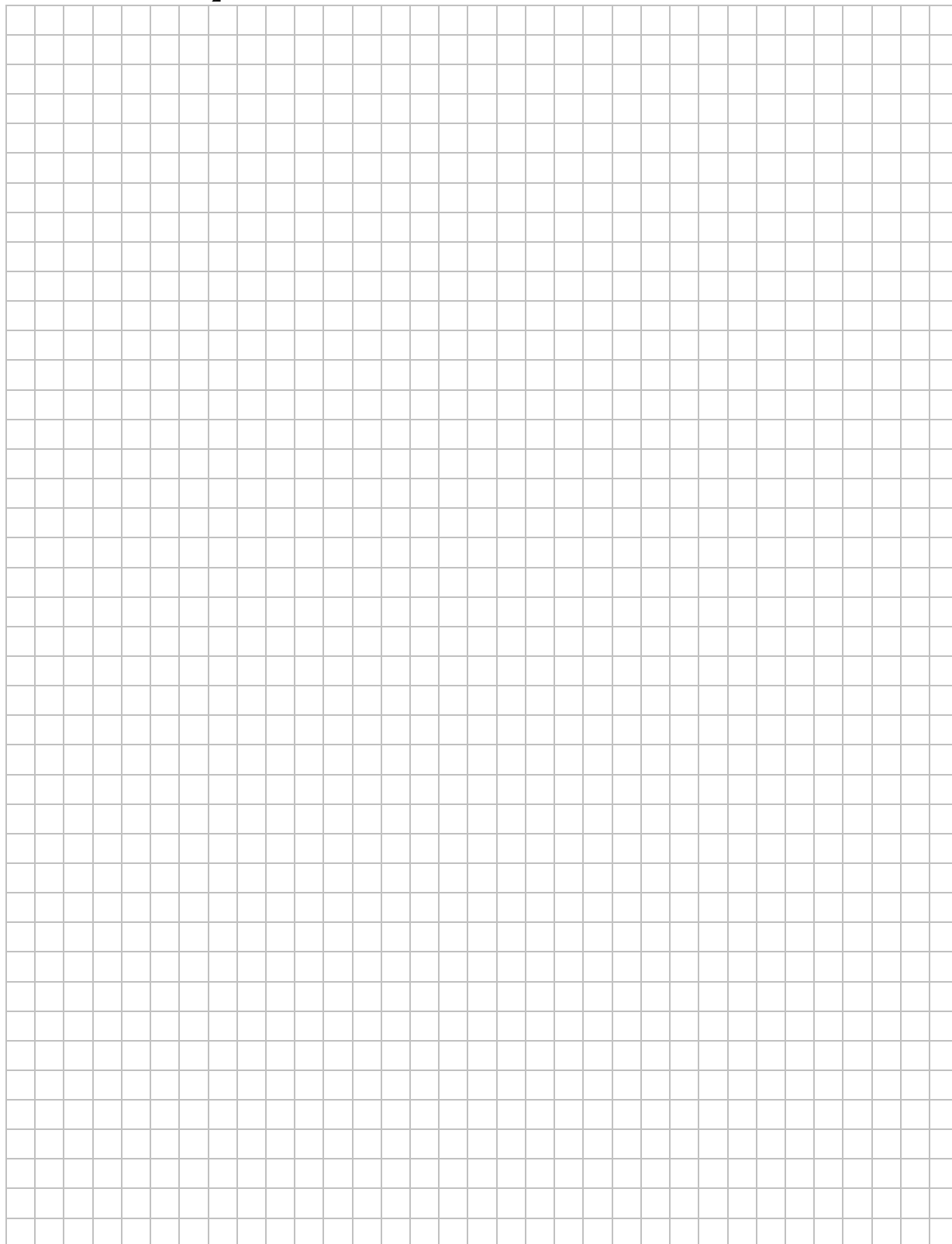


ZADANIE 7 (4 PKT)

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$3x - \frac{6x}{x+1} + \frac{12x}{(x+1)^2} - \frac{24x}{(x+1)^3} + \dots$$

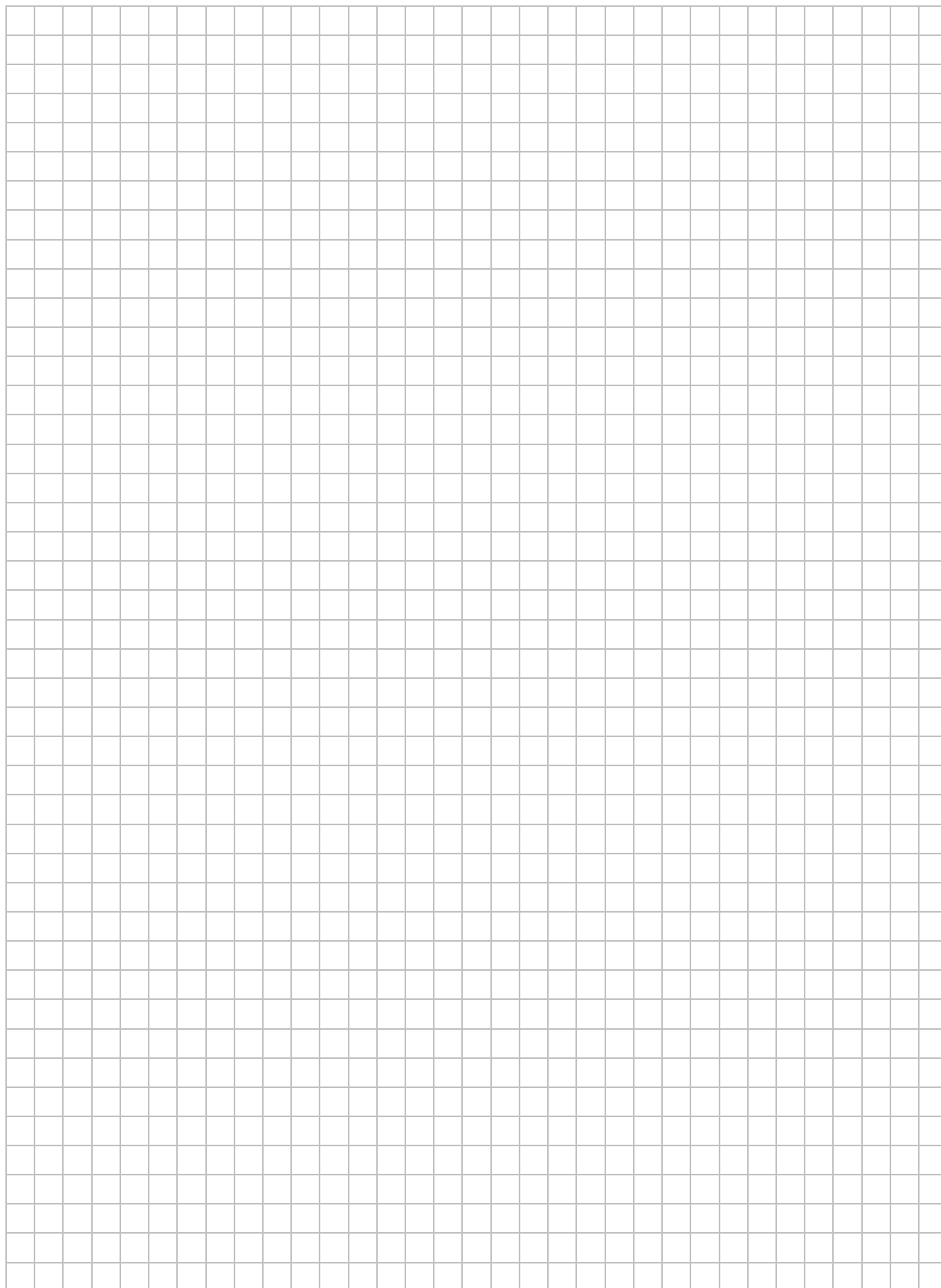
Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od -1 i od 0), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{187}{2}$.



ZADANIE 8 (4 PKT)

Rozwiąż równanie

$$\cos \frac{5x}{4} \sin \frac{5x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$$

w zbiorze $[-\pi, \pi]$.

ZADANIE 9 (4 PKT)

Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2 + 6x + 9} > 7,5 - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.



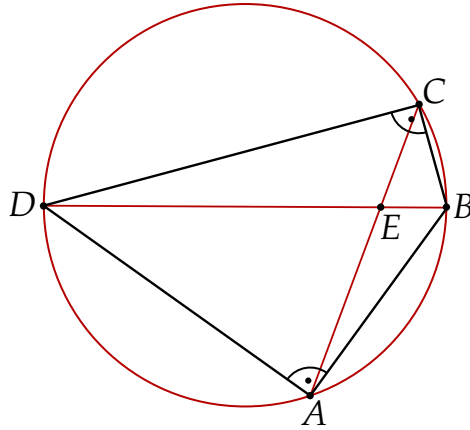
ZADANIE 10 (4 PKT)

Każda ściana graniastopy jest rombem o boku długości a i kącie ostrym o mierze 60° .
Oblicz objętość tego graniastopy.



ZADANIE 11 (5 PKT)

Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu 9. Kąty BAD i BCD są proste (zobacz rysunek). Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie E tak, że $|DE| = 5 \cdot |BE|$ oraz $|BD| = 2 \cdot |AE|$.



Oblicz długości boków czworokąta $ABCD$.

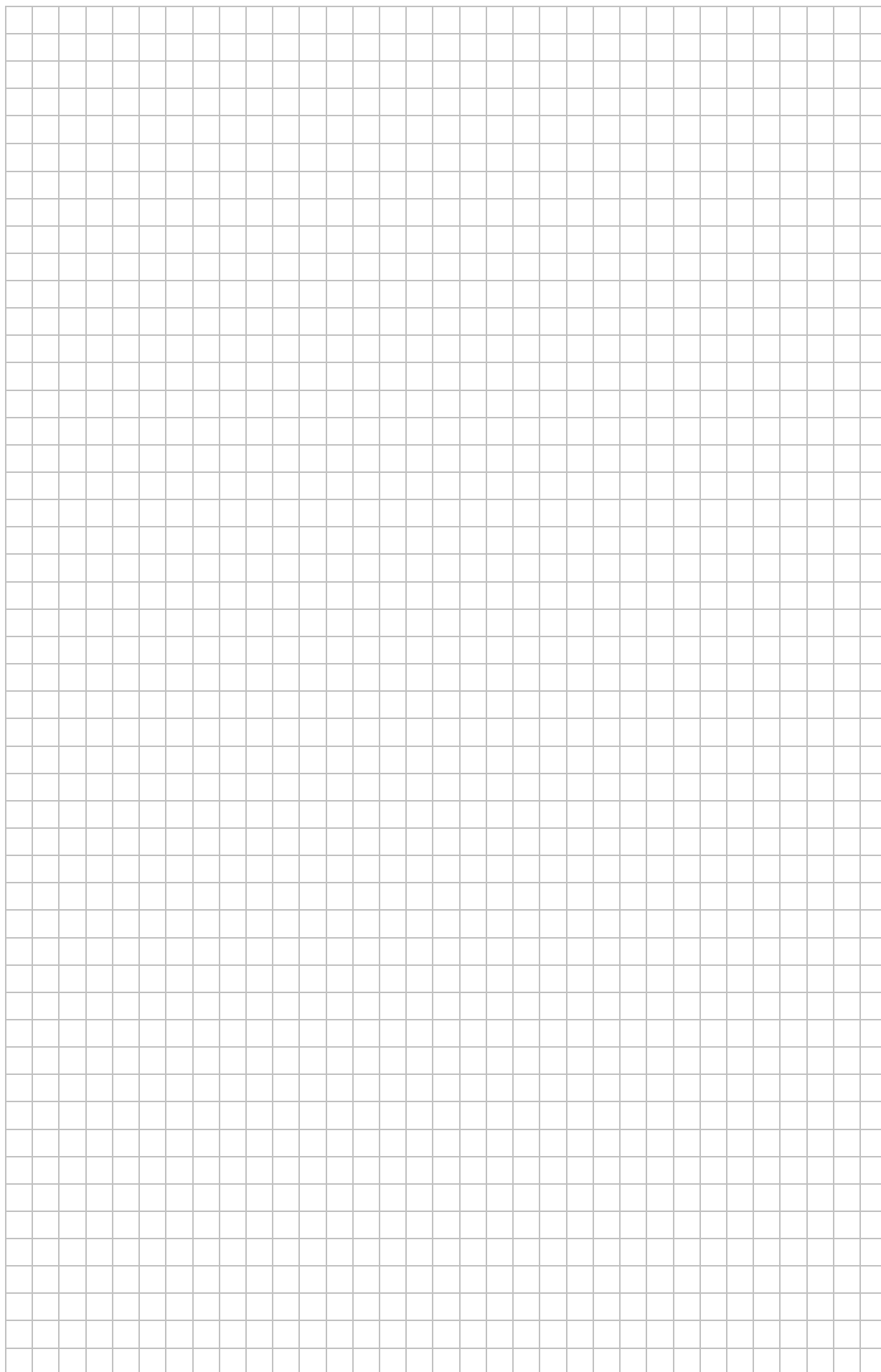




ZADANIE 12 (5 PKT)

Dla dowolnej liczby $m \geq 3$, prosta $y = \frac{1}{4}m^2x - m$ przecina hiperbolę $y = \frac{3}{x}$ w punktach P i Q . Uzasadnij, że $|PQ| \geq 6,56$.





ZADANIE 13 (6 PKT)

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku $(4, -5)$ i promieniu $5\sqrt{2}$. Przekątna AC zawiera się w prostej o równaniu $2y + x + 11 = 0$ i tworzy z bokiem CD kąt o mierze 45° . Obie współrzędne punktu A są ujemne, a obie współrzędne punktu D są dodatnie. Przekątne czworokąta $ABCD$ są prostopadłe. Oblicz współrzędne punktu B .

