

Miejsce  
na naklejkę  
z kodem szkoły

dysleksja

MMA-P1A1P-062

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz I

**POZIOM PODSTAWOWY**

**Czas pracy 120 minut**

**ARKUSZ I**

**MAJ  
ROK 2006**

## Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ⊙ i zaznacz właściwe.

Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

*Życzymy powodzenia!*

Wypełnia zdający przed  
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**PESEL ZDAJĄCEGO**

--	--	--

**KOD  
ZDAJĄCEGO**

**Zadanie 1. (3 pkt)**

Dane są zbiory:  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \geq 7\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\}$ . Zaznacz na osi liczbowej:

- zbiór  $A$ ,
- zbiór  $B$ ,
- zbiór  $C = B \setminus A$ .

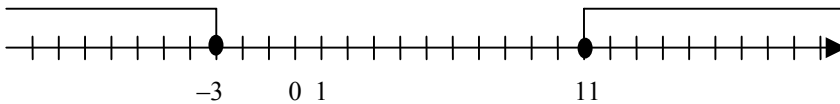
a)

Zapisuję nierówność  $|x - 4| \geq 7$  w postaci alternatywy nierówności:

$x - 4 \leq -7$  lub  $x - 4 \geq 7$  i rozwiązuję każdą z nich.

$$x \leq -3 \quad \text{lub} \quad x \geq 11.$$

Zaznaczam na osi liczbowej zbiór  $A$ .

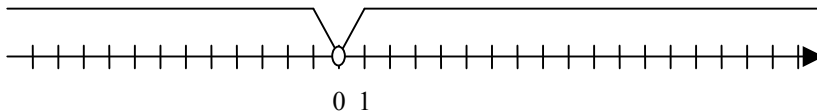


b)

Rozwiązuję nierówność  $x^2 > 0$ .

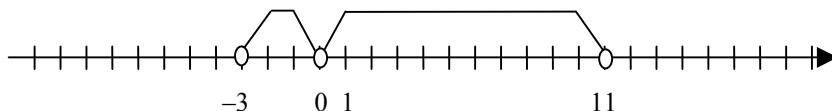
$$x \neq 0$$

Zaznaczam na osi liczbowej zbiór  $B$ .



c)

Zaznaczam na osi liczbowej zbiór  $C$ .



Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	1.1.	1.2.	1.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

**Zadanie 2. (3 pkt)**

W wycieczce szkolnej bierze udział 16 uczniów, wśród których tylko czworo zna okolicę. Wychowawca chce wybrać w sposób losowy 3 osoby, które mają pójść do sklepu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych trzech osób będą dokładnie dwie znające okolicę.

$\Omega$  jest zbiorem wszystkich trzelementowych podzbiorów zbioru szesnastoelementowego.

Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, więc korzystam z klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Obliczam, na ile sposobów można wybrać trzy osoby spośród 16:

$$|\Omega| = \binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3} = 560$$

Zdarzenie  $A$  – wśród trzech wybranych osób będą dwie, które znają okolicę i jedna, która okolicy nie zna.

Obliczam, na ile sposobów można wybrać trzy osoby, wśród których będą dwie znające okolicę i jedna, która okolicy nie zna:  $|A| = \binom{4}{2} \binom{12}{1} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 12 = 72$ .

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{72}{560} = \frac{9}{70}$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	2.1.	2.2.	2.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

**Zadanie 3. (5 pkt)**

Kostka masła produkowanego przez pewien zakład mleczarski ma nominalną masę 20 dag. W czasie kontroli zakładu zważono 150 losowo wybranych kostek masła. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Masa kostki masła ( w dag )	16	18	19	20	21	22
Liczba kostek masła	1	15	24	68	26	16

- a) Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oblicz średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe masy kostki masła.  
b) Kontrola wypada pozytywnie, jeśli średnia masa kostki masła jest równa masie nominalnej i odchylenie standardowe nie przekracza 1 dag. Czy kontrola zakładu wypadła pozytywnie? Odpowiedź uzasadnij.

*Obliczam średnią masę kostki masła:*

$$\bar{x} = \frac{16 \cdot 1 + 18 \cdot 15 + 19 \cdot 24 + 20 \cdot 68 + 21 \cdot 26 + 22 \cdot 16}{150} = 20.$$

*Obliczam wariancję:*

$$\sigma^2 = \frac{1 \cdot 4^2 + 15 \cdot 2^2 + 24 \cdot 1^2 + 68 \cdot 0^2 + 26 \cdot 1^2 + 16 \cdot 2^2}{150} = \frac{19}{15}.$$

*Obliczam odchylenie standardowe:  $\sigma = \sqrt{\frac{19}{15}} \approx 1,125$ .*

*Odp.: Kontrola zakładu nie wypadła pozytywnie, ponieważ odchylenie standardowe przekroczyło 1 dag.*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	3.1.	3.2.	3.3.
	Maks. liczba pkt	2	2	1
	Uzyskana liczba pkt			

**Zadanie 4. (4 pkt)**

Dany jest rosnący ciąg geometryczny, w którym  $a_1 = 12$ ,  $a_3 = 27$ .

- Wyznacz iloraz tego ciągu.
- Zapisz wzór, na podstawie którego można obliczyć wyraz  $a_n$ , dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .
- Oblicz wyraz  $a_6$ .

Wyznaczam iloraz ciągu geometrycznego:  $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$ ;

stąd  $q = \frac{3}{2}$  lub  $q = -\frac{3}{2}$ .

Odrzucam odpowiedź  $q = -\frac{3}{2}$ , ponieważ  $a_1 > 0$  i ciąg jest rosnący.

wniosek: ilorazem tego ciągu jest  $q = \frac{3}{2}$ .

Wyznaczam wzór na  $a_n$ :  $a_n = 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ .

Obliczam  $a_6$ :  $a_6 = 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 91\frac{1}{8}$ .

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	4.1.	4.2.	4.3.
	Maks. liczba pkt	2	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

**Zadanie 5. (3 pkt)**

Wiedząc, że  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ,  $\sin \alpha < 0$  oraz  $4 \operatorname{tg} \alpha = 3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$

- oblicz  $\operatorname{tg} \alpha$ ,
- zaznacz w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$  i podaj współrzędne dowolnego punktu, różnego od początku układu współrzędnych, który leży na końcowym ramieniu tego kąta.

*Obliczam tangens kąta  $\alpha$  z podanego równania:*

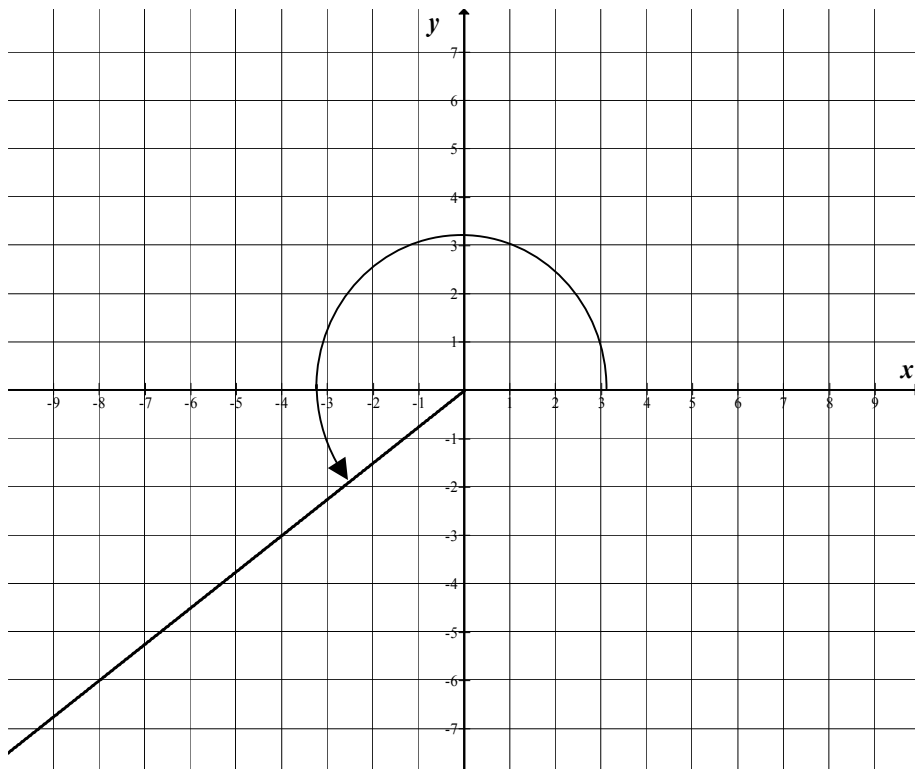
$$4 \operatorname{tg} \alpha = 3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha,$$

$$4 \operatorname{tg} \alpha = 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

*Korzystam z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  i otrzymuję:*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}.$$

*Zaznaczam w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$ .*

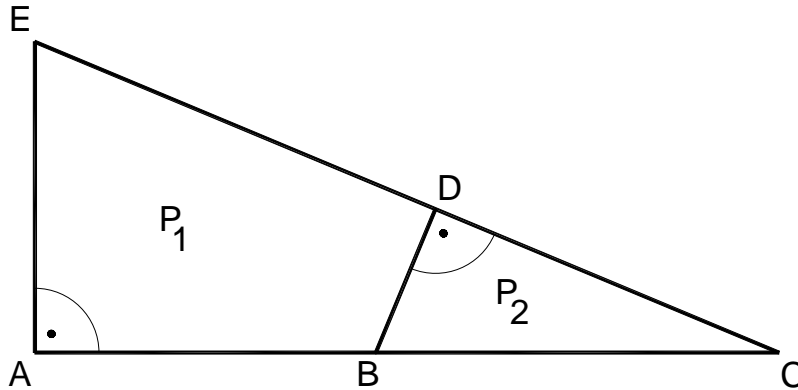


*Punkt  $(-4, -3)$  leży na końcowym ramieniu szukanego kąta.*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	5.1.	5.2.	5.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

**Zadanie 6. (7 pkt)**

Państwo Nowakowie przeznaczycy 26000 zł na zakup działki. Do jednej z ofert dołączono rysunek dwóch przylegających do siebie działek w skali 1:1000. Jeden metr kwadratowy gruntu w tej ofercie kosztuje 35 zł. Oblicz, czy przeznaczona przez państwa Nowaków kwota wystarczy na zakup działki  $P_2$ .



$$\begin{aligned} |AE| &= 5 \text{ cm}, \\ |EC| &= 13 \text{ cm}, \\ |BC| &= 6,5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

*Trójkąty ACE i DCB są podobne.*

*Z twierdzenia o polach figur podobnych otrzymuję zależność:  $\frac{P_2}{P_{\Delta ACE}} = k^2$ ,*

*gdzie  $k$  jest skalą podobieństwa trójkątów.*

*Wyznaczam skalę podobieństwa  $k$ :  $k = \frac{|BC|}{|EC|} = \frac{6,5}{13} = \frac{1}{2}$ .*

*Wyznaczam zależność między polami trójkątów podobnych  $P_2$  i  $P_{\Delta ACE}$ :*

$$P_2 = k^2 \cdot P_{\Delta ACE}, \text{ stąd } P_2 = \frac{1}{4} \cdot P_{\Delta ACE}.$$

*Obliczam długość odcinka AC z trójkąta AC:  $|AC| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$ .*

*Obliczam pole trójkąta ACE (na rysunku):  $P_{\Delta ACE} = 30 \text{ cm}^2$ .*

*Obliczam pole działki  $P_2$  (na rysunku):  $P_2 = \frac{1}{4} P_{\Delta ACE} = 7,5 \text{ cm}^2$ .*

*Obliczam pole działki  $P_2$  w rzeczywistości:  $P_2 = 7,5 \text{ cm}^2 \cdot (1000)^2 = 750 \text{ m}^2$ .*

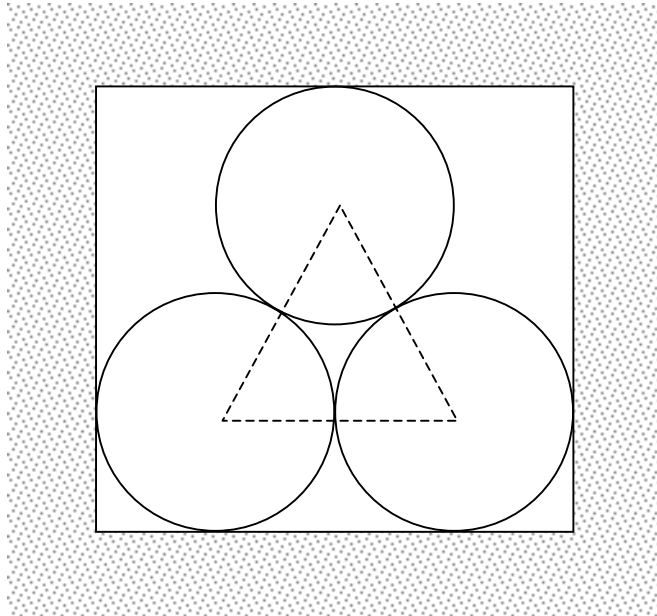
*Obliczam koszt zakupu działki  $P_2$ :  $750 \cdot 35 = 26250 \text{ zł}$ .*

*Odp.: Przeznaczona kwota nie wystarczy na zakup tej działki, zabraknie 250 zł.*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	6.1.	6.2.	6.3.	6.4.	6.5.	6.6.	6.7.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt							

**Zadanie 7. (5 pkt)**

Szkic przedstawia kanał ciepłowniczy, którego przekrój poprzeczny jest prostokątem. Wewnątrz kanału znajduje się rurociąg składający się z trzech rur, każda o średnicy zewnętrznej 1 m. Oblicz wysokość i szerokość kanału ciepłowniczego. Wysokość zaokrąglaj do 0,01 m.



*Środki okręgów na przedstawionym w zadaniu szkicu są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku długości  $a = 1$ .*

*Obliczam wysokość tego trójkąta:  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .*

*Obliczam wysokość kanału ciepłowniczego:  $d = 2r + h$ ,  $d = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .*

*Odp.: Wysokość kanału z zadaniem zaokrągleniem jest równa  $d \approx 1,87$  m*

*a jego szerokość  $s = 2$  m.*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	7.1.	7.2.	7.3.	7.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	2	1
	Uzyskana liczba pkt				



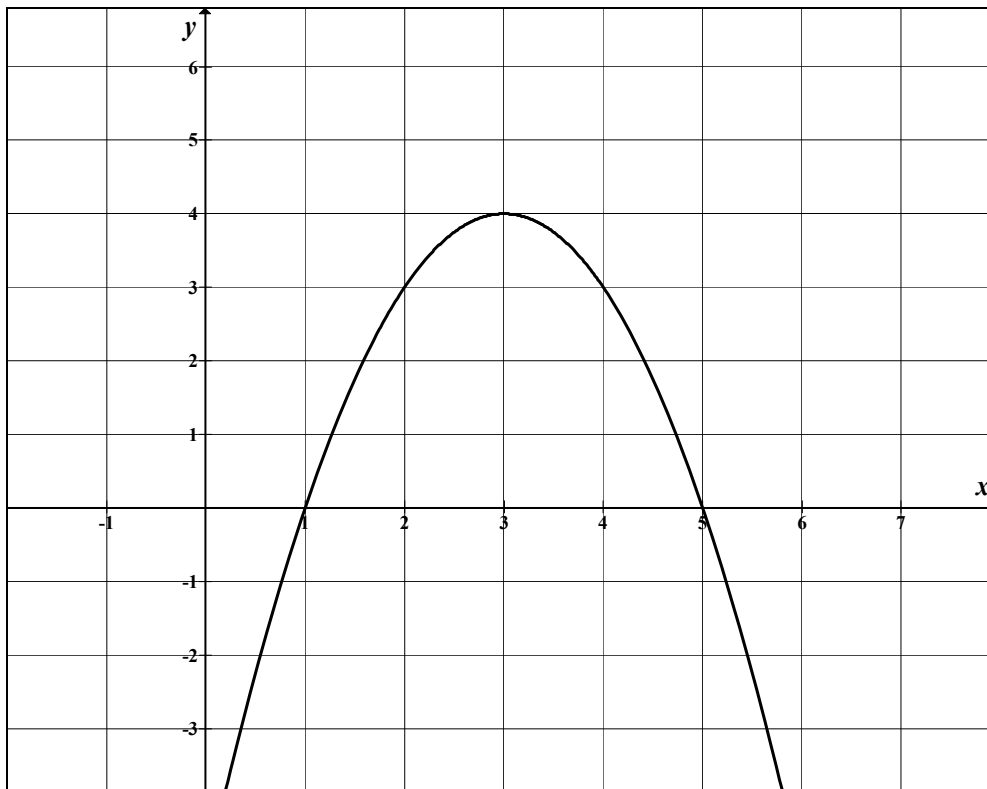
**Zadanie 8. (5 pkt)**Dana jest funkcja  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ .

- Naszkicuj wykres funkcji  $f$  i podaj jej zbiór wartości.
- Podaj rozwiązanie nierówności  $f(x) \geq 0$ .

*Wyznaczam współrzędne wierzchołka paraboli:*

$$p = \frac{-b}{2a}; p = \frac{-6}{-2} = 3,$$

$$\Delta = 16; q = \frac{-\Delta}{4a}, q = \frac{-16}{-4} = 4$$

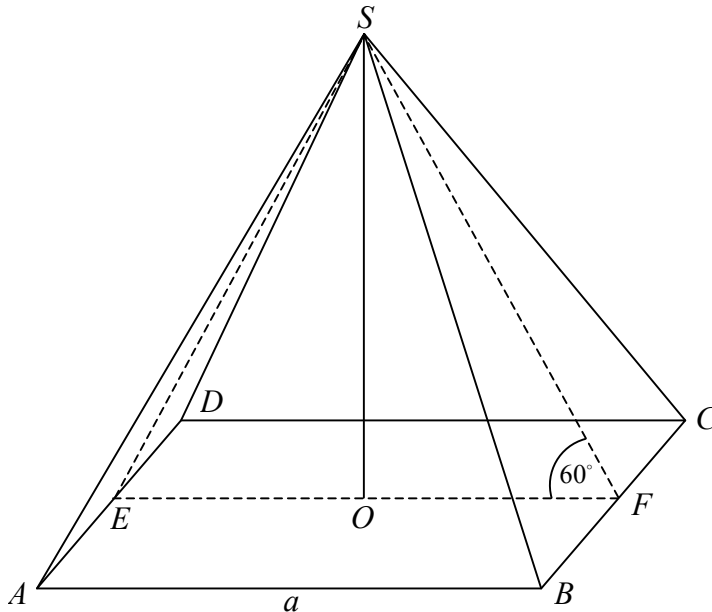
*stąd  $W = (3, 4)$ .**Wyznaczam miejsca zerowe funkcji:  $x_1 = 1, x_2 = 5$ .**Zbiór wartości funkcji:  $(-\infty, 4)$ .**Rozwiązaniem nierówności  $f(x) \geq 0$  są wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału  $\langle 1, 5 \rangle$ .*

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	8.1.	8.2.	8.3.	8.4.	8.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

**Zadanie 9. (6 pkt)**

Dach wieży ma kształt powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 m. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $60^\circ$ .

- Sporządź pomocniczy rysunek i zaznacz na nim podane w zadaniu wielkości.
- Oblicz, ile sztuk dachówek należy kupić, aby pokryć ten dach, wiedząc, że do pokrycia  $1 \text{ m}^2$  potrzebne są 24 dachówki. Przy zakupie należy doliczyć 8% dachówek na zapas.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:  $a = |AB| = 4 \text{ m}$ .

Trójkąt  $EFS$  jest równoboczny.

Wysokość ściany bocznej  $|SF| = 4 \text{ m}$ .

Obliczam pole powierzchni dachu:

$$P = 4 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 32 \text{ m}^2.$$

Obliczam liczbę dachówek bez uwzględniania zapasu:

$$32 \cdot 24 = 768 \text{ sztuk.}$$

Obliczam, ile dachówek należy kupić, uwzględniając zapas:

$$108\% \cdot 768 = 829,44.$$

Odp.: Należy kupić 830 sztuk dachówek.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	9.1.	9.2.	9.3.	9.4.	9.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	2	1
	Uzyskana liczba pkt					

**Zadanie 10. (6 pkt)**

Liczby 3 i  $-1$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 30$ .

- Wyznacz wartości współczynników  $a$  i  $b$ .
- Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

*Do rozwiązania zadania wykorzystuję twierdzenie Bézouta.*

$$W(3) = 0 \Leftrightarrow 9a + 3b + 84 = 0,$$

$$W(-1) = 0 \Leftrightarrow a - b + 28 = 0.$$

*Rozwiązuję układ równań:* 
$$\begin{cases} 9a + 3b + 84 = 0 \\ a - b + 28 = 0 \end{cases}$$

$$a = -14, \quad b = 14.$$

*Podstawiam obliczone wartości współczynników  $a$ ,  $b$  i zapisuję wielomian*

$$W(x) = 2x^3 - 14x^2 + 14x + 30.$$

*Wielomian  $W(x)$  dzielę przez  $(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$ :*

$$(2x^3 - 14x^2 + 14x + 30) : (x^2 - 2x - 3) = 2x - 10.$$

*Obliczam trzeci pierwiastek:  $2x - 10 = 0$*

$$x = 5.$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	10.1.	10.2.	10.3.	10.4.	10.5.	10.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt						

**Zadanie 11. (3 pkt)**

Sumę  $S = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{301 \cdot 304} + \frac{3}{304 \cdot 307}$  można obliczyć w następujący sposób:

a) sumę  $S$  zapisujemy w postaci

$$S = \frac{4-1}{4 \cdot 1} + \frac{7-4}{7 \cdot 4} + \frac{10-7}{10 \cdot 7} + \dots + \frac{304-301}{304 \cdot 301} + \frac{307-304}{307 \cdot 304}$$

b) każdy składnik tej sumy przedstawiamy jako różnicę ułamków

$$S = \left( \frac{4}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 1} \right) + \left( \frac{7}{7 \cdot 4} - \frac{4}{7 \cdot 4} \right) + \left( \frac{10}{10 \cdot 7} - \frac{7}{10 \cdot 7} \right) + \dots + \left( \frac{304}{304 \cdot 301} - \frac{301}{304 \cdot 301} \right) + \left( \frac{307}{307 \cdot 304} - \frac{304}{307 \cdot 304} \right)$$

$$\text{stąd } S = \left( 1 - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \left( \frac{1}{301} - \frac{1}{304} \right) + \left( \frac{1}{304} - \frac{1}{307} \right)$$

$$\text{więc } S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{301} - \frac{1}{304} + \frac{1}{304} - \frac{1}{307}$$

c) obliczamy sumę, redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim

$$S = 1 - \frac{1}{307} = \frac{306}{307}.$$

Postępując w analogiczny sposób, oblicz sumę  $S_1 = \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{4}{281 \cdot 285}$ .

*Zapisuj sumę  $S_1$  w postaci:*  $S_1 = \frac{5-1}{5 \cdot 1} + \frac{9-5}{9 \cdot 5} + \frac{13-9}{13 \cdot 9} + \dots + \frac{285-281}{285 \cdot 281}$ .

*Zapisuj każdy składnik sumy w postaci różnicy ułamków:*

$$S_1 = \left( \frac{5}{5 \cdot 1} - \frac{1}{5 \cdot 1} \right) + \left( \frac{9}{9 \cdot 5} - \frac{5}{9 \cdot 5} \right) + \left( \frac{13}{13 \cdot 9} - \frac{9}{13 \cdot 9} \right) + \dots + \left( \frac{285}{285 \cdot 281} - \frac{281}{285 \cdot 281} \right)$$

$$\text{stąd } S_1 = \left( 1 - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \dots + \left( \frac{1}{281} - \frac{1}{285} \right)$$

$$\text{więc } S_1 = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{281} - \frac{1}{285}.$$

*Obliczam sumę, redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim:*

$$S_1 = 1 - \frac{1}{285} = \frac{284}{285}.$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	11.1.	11.2.	11.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

## **BRUDNOPIS**