PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

POZIOM ROZSZERZONY

Zadanie 1.

$9^a = 64$	$27^b = 125$
$(3^2)^a = 64$	$(3^3)^b = 125$
$(3^a)^2 = 64$ i $3^a > 0$	$\left(3^b\right)^3 = 125$
stąd $3^a = 8$	stąd $3^b = 5$

Zatem $3^{a-b} = \frac{3^a}{3^b} = \frac{8}{5}$.

Odpowiedź: $\mathbf{3^{a-b} = \frac{8}{5}}$.

Zadanie 2.

$(p^3 + 2p^2 - p - 2)x + 1 - 3p \geq 0$ dla każdego $x \in R$.

Zatem $(p^3 + 2p^2 - p - 2) = 0$ i $1 - 3p \geq 0$.

$p^2(p + 2) - (p + 2) = 0$,

$(p^2 - 1)(p + 2) = 0$,

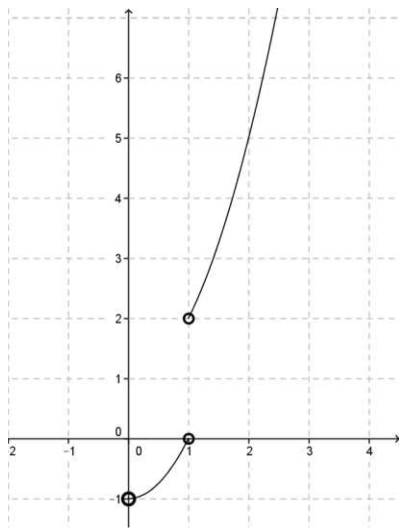
$p \in \{-2; -1; 1\}$ i $p \leq \frac{1}{3}$.

Odp. $\boldsymbol{p} \in \{-\mathbf{2}; -\mathbf{1}\}$.

Zadanie 3.

Naszkicujemy wykres funkcji f, której dziedziną jest zbiór $R_+ \backslash \{1\}$.

$\log_x 2014 = \frac{1}{\log_{2014} x}$. Rozpatrzmy dwa przypadki:



1^0 $x \in (0; 1)$ wtedy $|\log_{2014} x| = -\log_{2014} x$

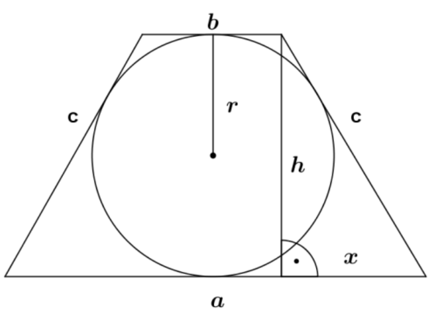
$f(x) = x^2 - \log_{2014} x \cdot \frac{1}{\log_{2014} x} = x^2 - 1$,

2^0 $x \in (1; +\infty)$ wtedy $|\log_{2014} x| = \log_{2014} x$

$f(x) = x^2 + \log_{2014} x \cdot \frac{1}{\log_{2014} x} = x^2 + 1$.

Odp. Zbiór wartości funkcji $\boldsymbol{f}$ to $(-\mathbf{1}; \mathbf{0}) \cup (\mathbf{2}; +\infty)$.

Zadanie 4.



Okrąg jest wpisany w trapez, więc $a + b = c + c$,

$h = 2r > 0$ i $x = \frac{a-b}{2}$, bo trapez jest równoramienny.

Zatem $h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Stąd $h = \sqrt{a \cdot b}$, a zatem $2r = \sqrt{a \cdot b}$

c. n. d.

Zadanie 5.

Niech q będzie ilorazem ciągu geometrycznego (a_n) . Z warunku $\frac{S_6}{S_3} = \frac{26}{27}$ wynika, że $q \neq 1$ i $a_1 \neq 0$.

$\frac{S_6}{S_3} = \frac{a_1\frac{1-q^6}{1-q}}{a_1\frac{1-q^3}{1-q}} = \frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3} = 1 + q^3 = \frac{26}{27}$, stąd $q = -\frac{1}{3}$.

$W(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = x^3 - (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3)x - a_1a_2a_3$

$-a_1a_2a_3$ = 27, $-a_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}a_1\right) \cdot \left(\frac{1}{9}a_1\right) = 27$, zatem $a_1 = 9$, $k = -(a_1 + a_2 + a_3) = -7$,

$m = a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = -21$

Odp. $\boldsymbol{k = -7, m = -21}$**.**

Zadanie 6.

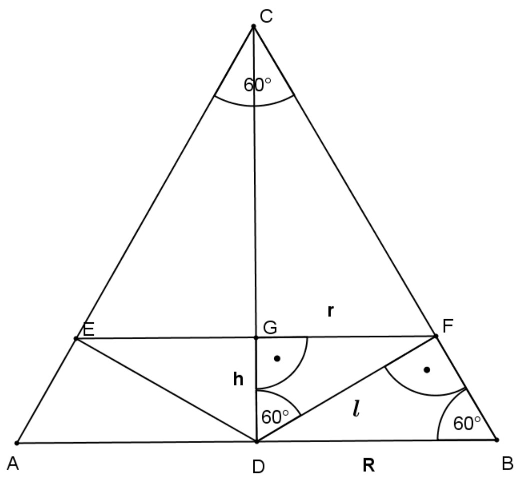
Podane równanie opisuje okrąg ośrodku S = $(3, -1)$ i promieniu długości $\sqrt{5}$. Punkt O = (0,0) nie leży na tym okręgu, zatem są dwie styczne poprowadzone z tego punktu.

Niech l będzie szukaną styczną. Prosta l: $ax - y = 0$, jej odległość od środka okręgu musi być równa $\sqrt{5}$. Otrzymujemy równanie $\frac{|3a+1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$, które ma dwa rozwiązania $a_1 = 2, a_2 = -\frac{1}{2}$.

Równania stycznych: $y = 2x, y = -\frac{1}{2}x$. Ponieważ $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, styczne są prostopadłe.

c.n.d.

Zadanie 7.



Przekrój osiowy dużego stożka jest trójkątem równobocznym o boku 2R. Wysokość dużego stożka H = $\frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Objętość dużego stożka $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3}$.

Trójkąt EFD jest przekrojem osiowym małego stożka. Wprowadźmy oznaczenia na rysunku.

$\sin 60^0 = \frac{l}{R}$ stąd $l = R\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin 60^0 = \frac{r}{l}$ stąd $r = \frac{3}{4}R$,

$\cos 60^0 = \frac{h}{l}$ stąd $h = \frac{R\sqrt{3}}{4}$.

Objętość małego stożka $V_2 = \frac{1}{3}\pi R^3\frac{9\sqrt{3}}{64}$.

Zatem $\frac{V_1}{V_2} = \frac{64}{9}$.

Odp. Stosunek objętości większego stożka do objętości wpisanego stożka jest równy $\boldsymbol{\frac{64}{9}}$**.**

Zadanie 8.

Z warunków $x_1 + x_2 = 12, x_1 \cdot x_2 = 16$ wynika, że $x_1, x_2 \in R_+$.

Ponieważ $\log_a x_1 + \log_a x_2 = 4$ musimy założyć, że $a \in R_+\backslash\{1\}$.

$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a 16 = 4$, stąd $a^4 = 16$ i $a \in R_+\backslash\{1\}$, zatem $a = 2$.

Z wzorów Viete'a mamy: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2} = 12$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{2} = 16$.

Zatem $b = -24$, $c = 32$, $f(x) = 2x^2 - 24x + 32$. Sprawdźmy jeszcze, że $\Delta = 320 > 0$.

Odpowiedź: $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 24x + 32}$**.**

Zadanie 9.

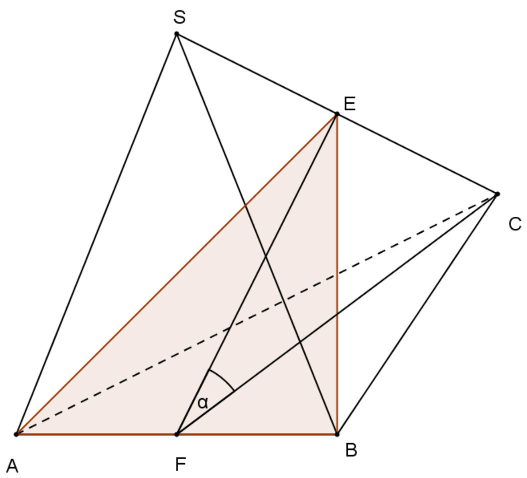
5 rękawiczek spośród 24 możemy wyciągnąć na $\binom{24}{5}$= 42504 sposoby.

5 rękawiczek, wśród których nie ma ani jednej pary, możemy wyciągnąć na $\binom{12}{5} \cdot 2^5 = 25344$ sposoby.

5 rękawiczek, wśród których jest przynajmniej jedna para, możemy wyciągnąć na 42504 – 25344 sposoby.

Odp. Jest 17160 możliwości.

Zadanie 10.



Niech a $(a > 0)$ oznacza długość krawędzi czworościanu.

$|FC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, |EC| = \frac{a}{2}, |\measuredangle FEC| = 90^0,$

$|EF|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, stąd $|EF| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Zatem $\cos\alpha = \frac{|EF|}{|FC|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ c.n.d

Zadanie 11.

$\cos x = -\frac{1}{2}$ lub $\sin x = k$

Równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania $x_1 = \frac{2}{3}\pi, x_2 = \frac{4}{3}\pi$.

Zatem $k = 1$ $\left(x_3 = \frac{\pi}{2}\right)$ lub $k = -1$ $\left(x_3 = \frac{3}{2}\pi\right)$ lub $k = \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(x_3 = \frac{\pi}{3}\right)$ lub $k = \sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(x_3 = \frac{5}{3}\pi\right)$.

Odp. $\boldsymbol{k \in \left\{1, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$**.**

Zadanie 12.

Ω = {500, 501, 502, …, 998, 999}, A = {501, 504,…, 999}, B = {500, 505, …, 995}

|Ω|= 500. Elementy zbioru A (uporządkowane rosnąco) są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 3. Stosując wzór na n – ty wyraz ciągu arytmetycznego dostaniemy równanie

999 = 501 + (n – 1) · 3, n ∈ N_+. Stąd n = 167 i |A|= 167.

Postępując analogicznie, pokażemy, że |B| = 100.

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B), A ∩ B = {510, 525, … , 990}, | A ∩ B| = 33.

Zatem P(A ∪ B) = $\frac{167}{500} + \frac{100}{500} - \frac{33}{500} = \frac{117}{250}$.

Odpowiedź: P(A ∪ B) $= \mathbf{\frac{117}{250}}$**.**