PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

6 KWIETNIA 2019

CZAS PRACY: 180 MINUT

Zadania zamknięte

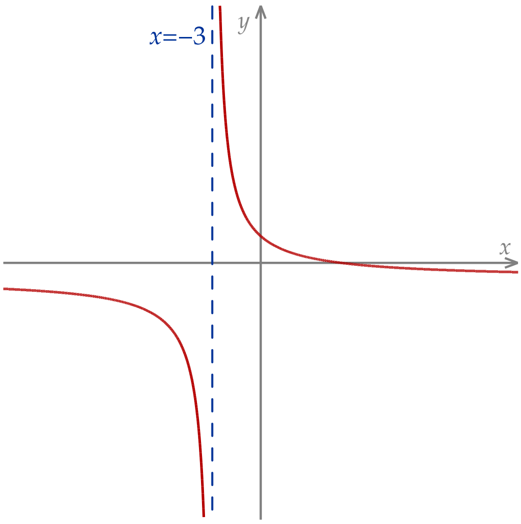
ZADANIE 1 (1 PKT)

Niech $L = \log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{5} \cdot \log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{2}$. Wtedy

A) $L = 1$ B) $L = \frac{8}{27}$ C) $L = \frac{3}{2}$ D) $L = \frac{9}{4}$

ZADANIE 2 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = -\frac{a+x}{x+3}$.



Liczba a może być równa

A) $a = 3$ B) $a = 4$ C) $a = -5$ D) $a = 6$

ZADANIE 3 (1 PKT)

Jeżeli α jest takim kątem rozwartym, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, to liczba $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ jest równa

A) $\frac{-7\sqrt{2}}{10}$ B) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ D) $\frac{-\sqrt{2}}{10}$

ZADANIE 4 (1 PKT)

Granica $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{x-2}{x^2-7x+10}$ jest równa

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) $+\infty$

ZADANIE 5 (1 PKT)

Funkcja $f(x) = \begin{cases} a|3-x| & \text{gdy } x \in (-\infty, -2) \\ \frac{1}{2}x^3 + a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{gdy } x \in \langle -2, +\infty) \end{cases}$ jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych jeżeli a jest równe

A) 1 B) -1 C) $\frac{2}{7}$ D) -2

ZADANIE 6 (2 PKT)

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$, poprowadzonej w punkcie $A = \left(-7, \frac{49}{6}\right)$ tego wykresu.

ZADANIE 7 (3 PKT)

W kwadrat K_1 o boku a wpisujemy kwadrat K_2, którego wierzchołki są środkami boków kwadratu K_1, następnie w kwadrat K_2 wpisujemy kwadrat K_3, którego wierzchołki są środkami boków K_2 i tak dalej. Oblicz sumę pól otrzymanego w ten sposób nieskończonego ciągu kwadratów.

ZADANIE 8 (2 PKT)

Na okręgu wybrano 50 punktów. Ile jest różnych czworokątów o wierzchołkach w tych punktach?

ZADANIE 9 (3 PKT)

Dane są liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeżeli liczba a^3 jest podzielna przez $a+b$, to liczba b^3 też jest podzielna $a+b$.

ZADANIE 10 (3 PKT)

Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru a równanie

$$x^3 - 6ax^2 + 12a^2x + x - 18 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

ZADANIE 11 (3 PKT)

Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geqslant 1$ i spełnia warunki

$$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_{n+1} = \frac{56(n+1)a_n}{1+2+3+\ldots+48} & \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \left(a_1 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{n!} \right).$$

ZADANIE 12 (4 PKT)

Rzucamy dziesięciokrotnie monetą. Wśród otrzymanych wyników dokładnie sześć razy otrzymaliśmy orła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdym z dwóch pierwszych rzutów otrzymaliśmy reszkę?

ZADANIE 13 (4 PKT)

Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie S. Promień okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABS jest o 1 większy od promienia okręgu opisanego na trójkącie CDS, a długości podstaw trapezu spełniają warunek $|AB| = |CD| + 1$. Wykaż, że

$$|AS|^2 + |BS|^2 = |AB|^2 + \sqrt{3} \cdot |AS| \cdot |BS|.$$

ZADANIE 14 (4 PKT)

Rozwiąż równanie $\sin 6x - 1 = \cos 3x - 2\sin 3x$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$.

ZADANIE 15 (5 PKT)

Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na prostej $y = -4$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB, BC i CA odpowiednio w punktach $P = (6, -4)$, $Q = (2, 4)$ i $R = (9, 5)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A, B i C tego trójkąta.

ZADANIE 16 (5 PKT)

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym α i przeciwprostokątnej długości a. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Wykaż, że pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe $\frac{a^2 \sin 2\alpha(\cos\beta+1)}{4\cos\beta}$.

ZADANIE 17 (7 PKT)

Rozważamy zbiór wszystkich trapezów równoramiennych, których krótsza podstawa i ramiona mają długość 6. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby jego pole było największe. Oblicz to pole.