

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

27 MARCA 2010

CZAS PRACY: 180 MINUT

ZADANIE 1 (4 PKT.)

Wewnątrz prostokąta $ABCD$ o wymiarach $|AB| = 8$ i $|AD| = 6$ wybrano dwa punkty M i N takie, że $MN \parallel AB$ oraz $|AM| = |DM| = |NB| = |NC|$. Przy jakiej odległości punktów M i N suma kwadratów długości odcinków AM, DM, MN, NB, NC jest najmniejsza?



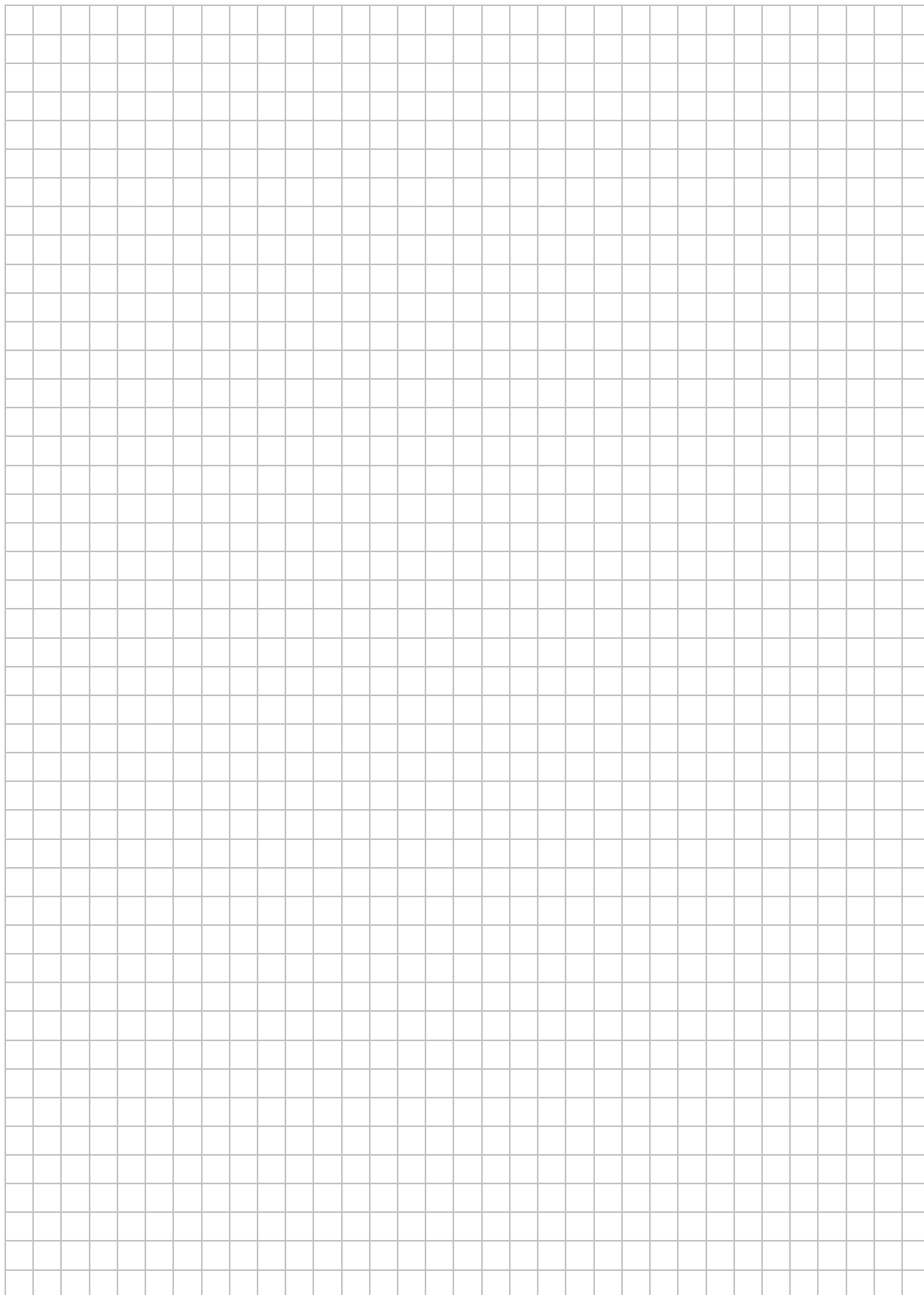
ZADANIE 2 (4 PKT.)

Rozwiązaniem nierówności $\log_p(x + 1) \leq 32^x + \frac{15}{16}$ z niewiadomą x jest zbiór $\langle -\frac{4}{5}, +\infty \rangle$.
Wyznacz p .



ZADANIE 3 (5 PKT.)

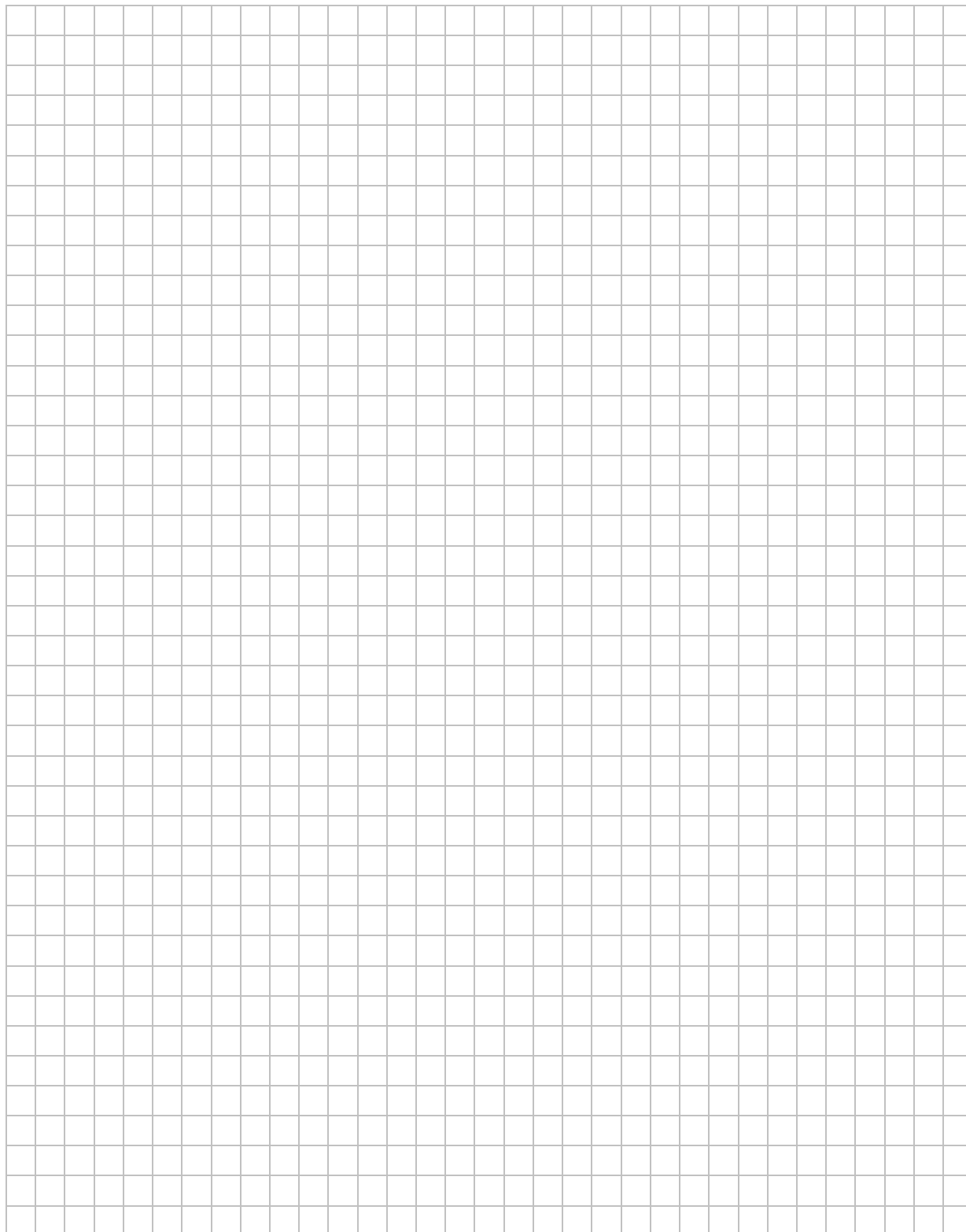
Różnica między pierwszym a siódmym wyrazem ciągu geometrycznego jest równa 63, a różnica między wyrazem pierwszym a czwartym jest równa 72. Oblicz sumę pierwszych 7 wyrazów tego ciągu.



ZADANIE 4 (5 PKT.)

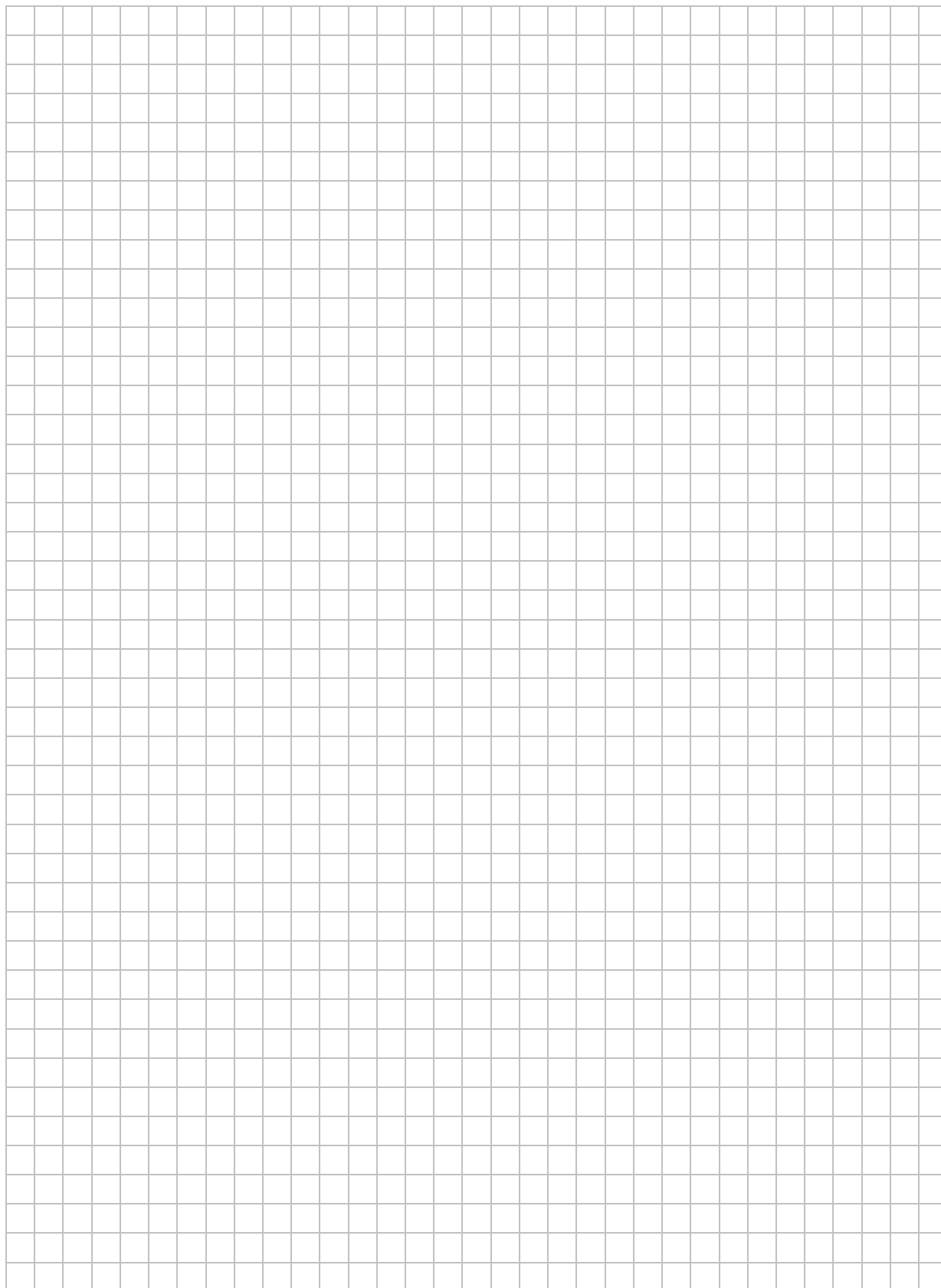
W urnie znajduje się N losów, przy czym M z nich to losy wygrywające ($M \leq N$). Wybieramy losowo n losów z urny ($n \leq N$) i niech p oznacza prawdopodobieństwo, że dokładnie m spośród tych losów to losy wygrywające ($m \leq M$ oraz $m \leq n$). Uzasadnij, że

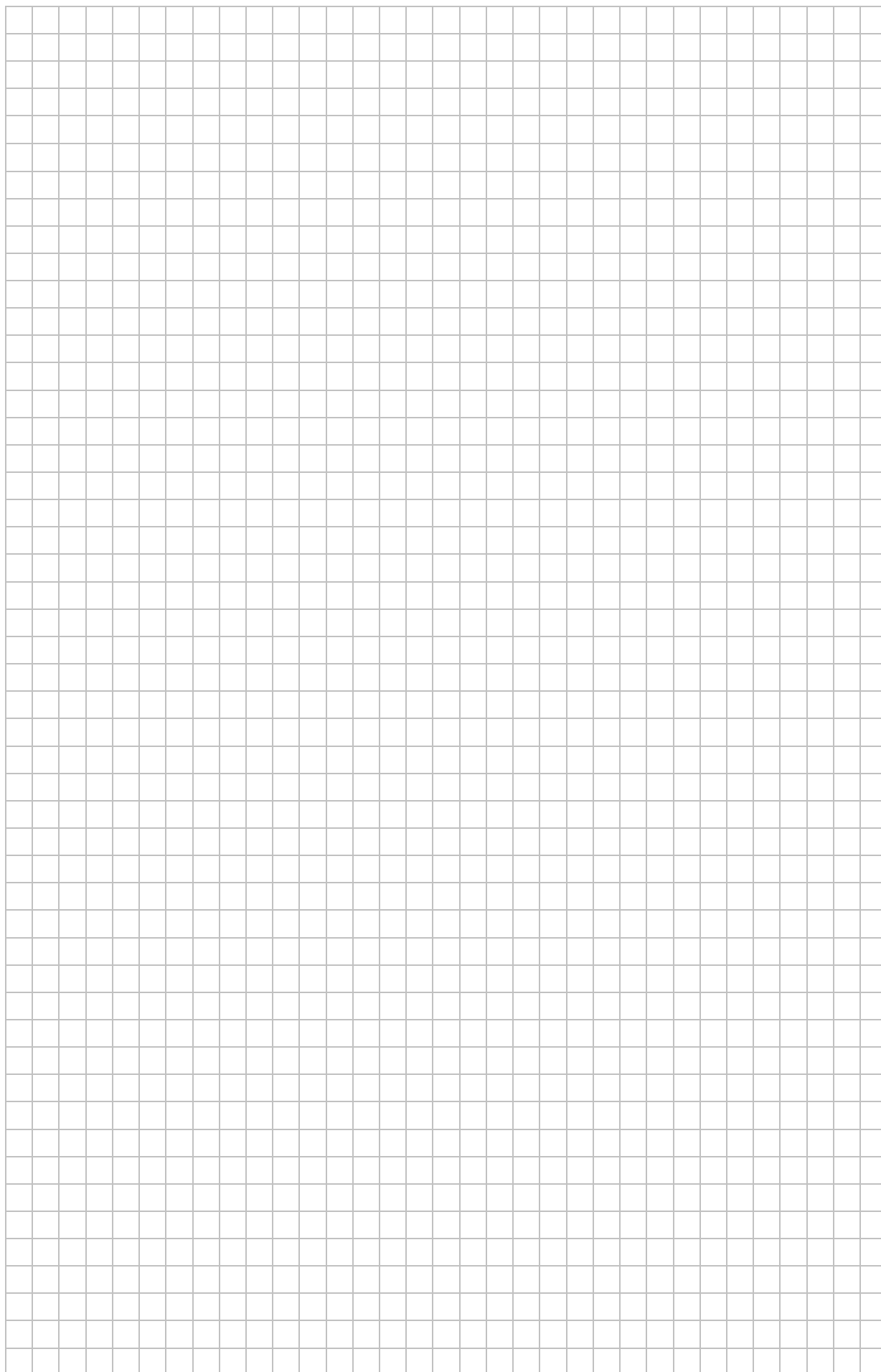
$$p = \frac{\binom{n}{m} \cdot \binom{N-n}{M-m}}{\binom{N}{M}}.$$



ZADANIE 5 (6 PKT.)

Na wysokości CD trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $|PD| = |PE|$, gdzie D i E są rzutami tego punktu odpowiednio na boki AB i BC . Wiedząc, że $\operatorname{tg} \angle ABC = 2\sqrt{2}$ oblicz iloraz $\frac{|BE|}{|EC|}$.





ZADANIE 6 (4 PKT.)

Wyznacz równanie okręgu, który jest obrazem okręgu $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 27$ w podobieństwie o środku $S = (-1, 4)$ i skali $\frac{1}{3}$.



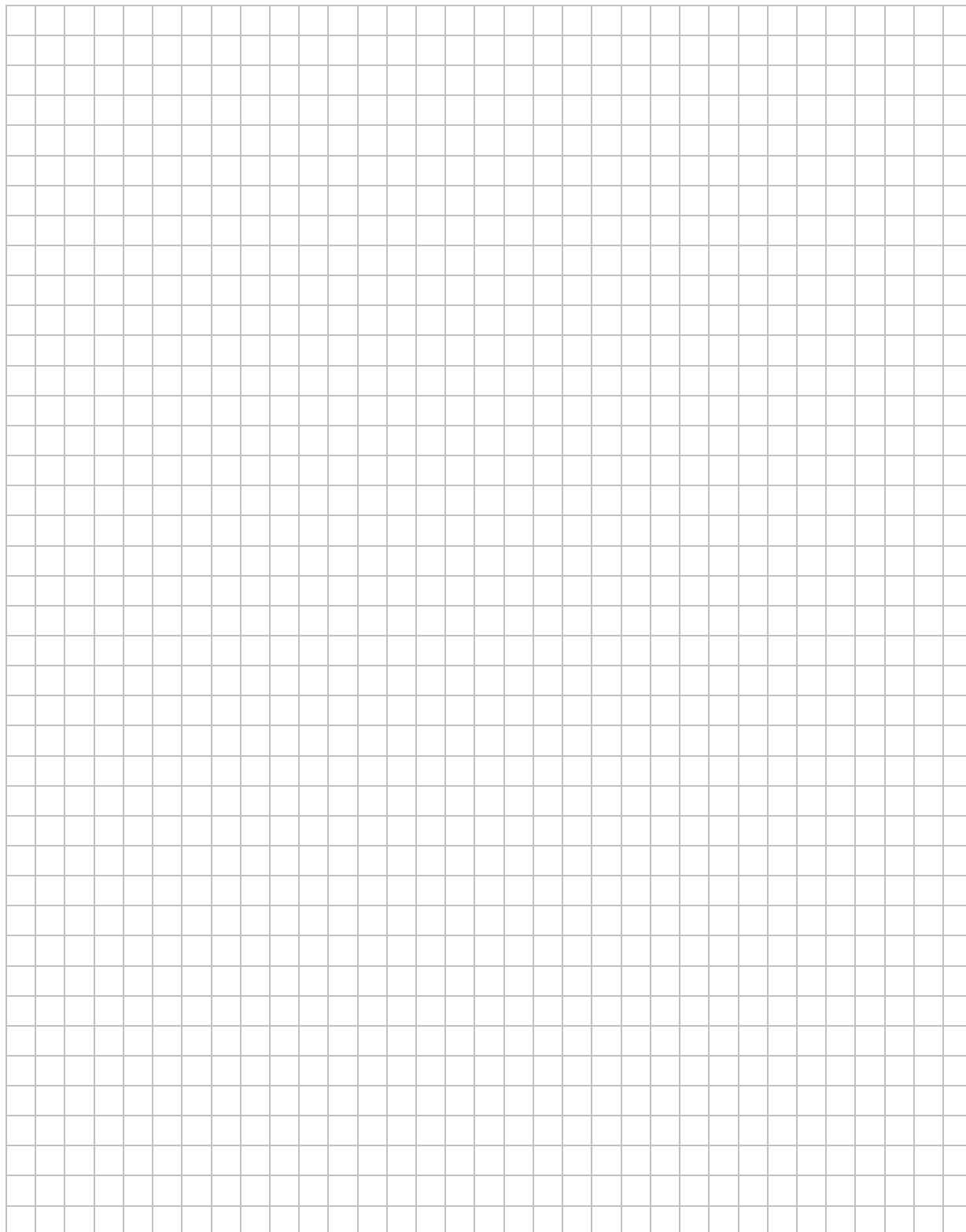
ZADANIE 7 (4 PKT.)

Wykaż, że jeżeli liczby całkowite x, y, z spełniają równanie $x^2 + y^2 + z^2 = 2010$ to co najwyżej jedna z liczb x, y, z dzieli się przez 4.



ZADANIE 8 (4 PKT.)

Sprzedawca zegarków kupił w hurtowni za 5746 złotych dwa rodzaje zegarków: damskie i męskie, przy czym kupił trzy razy więcej zegarków damskich niż męskich. Przy ponownym zakupie takiej samej ilości zegarków, otrzymał 10% rabatu na cenę zakupu zegarka damskiego oraz 10 zł upustu na cenę zakupu zegarka męskiego. Dzięki otrzymanym rabatami, łączny koszt zakupu zmalał do 5265 zł. Wiedząc, że po udzieleniu rabatu, cena męskiego zegarka była dwa razy wyższa od ceny zegarka damskiego, oblicz pierwotne ceny zegarków.



ZADANIE 9 (5 PKT.)

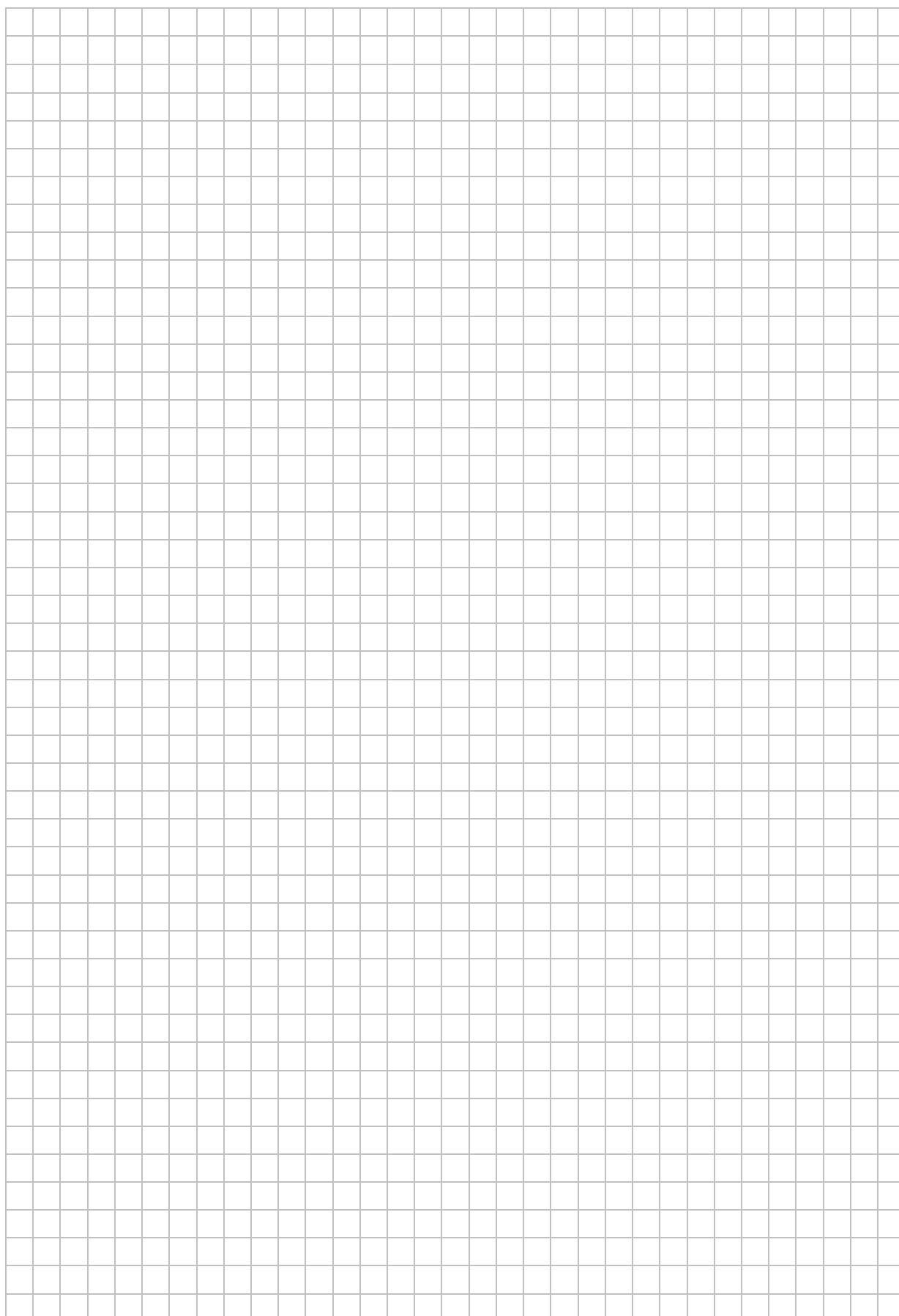
W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym poprowadzono płaszczyznę, która przechodzi przez dłuższą przekątną dolnej podstawy oraz przez jedną z krawędzi górnej podstawy. Płaszczyzna ta wyznacza przekrój graniastosłupa, który jest trapezem równoramiennym. Wiedząc, że w trapez ten można wpisać okrąg o promieniu 1, oblicz objętość graniastosłupa.





ZADANIE 10 (3 PKT.)

Rozwiąż równanie $3 - 4 \sin^2 x = 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$.



ZADANIE 11 (6 PKT.)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(1 - m)x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie ujemne.

