

Matura próbna – matematyka poziom rozszerzony

Zadanie 1 (1pkt)

Jaki jest zbiór wartości funkcji $f(x) = |5 \cos 2x - 1 - \sqrt{2}|$, jeśli $x \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \rangle$?

- (a) $\langle 0, 6 + \sqrt{2} \rangle$
- (b) $\langle 0, \frac{7}{2} + \sqrt{2} \rangle$
- (c) $\langle 4 - \sqrt{2}, \frac{7}{2} + \sqrt{2} \rangle$
- (d) $\langle -\frac{7}{2} - \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2} \rangle$

Zadanie 2 (1pkt)

Niech $x^3 + ax^2 + b = 0$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Wynika stąd, że:

- (a) Wielomian nie może mieć 3 różnych rozwiązań
- (b) Suma wszystkich rozwiązań jest równa $(-b)$
- (c) Iloczyn wszystkich rozwiązań jest równy 0
- (d) Jeśli $a < 0$ to suma wszystkich rozwiązań jest dodatnia

Zadanie 3 (1pkt)

Ile wynosi reszta z dzielenia $x = 35^{56} - 16^{16}$ przez 10?

- (a) 1
- (b) 9
- (c) 0
- (d) 6

Zadanie 4 (1pkt)

Niech będą dane liczby: $a = 2^{700}$, $b = 5^{300}$, $c = 3^{500}$. Wtedy:

- (a) $a > b > c$
- (b) $a > c > b$
- (c) $b > c > a$
- (d) $c > a > b$

Zadanie 5 (1pkt)

Jaki jest okres podstawowy funkcji $f(x) = 1 - 2 \sin \pi x$?

- (a) 2π
- (b) π
- (c) 2
- (d) 1

Zadanie 6 (2pkt)

Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sqrt[6]{n^2-5} - \sqrt[6]{n^3+n^2}}{\sqrt[2]{n}} \right|$. Zakoduj kolejno cyfry setek, dziesiątek i jedności a .

Zadanie 7 (3pkt)

Udowodnij, że dla dowolnych a, b, c, d zachodzi nierówność:

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 \geq a(b+c) + b(c+d) + cd$$

Zadanie 8 (3pkt)

Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{\sin 15^\circ \sin 75^\circ \sin 20^\circ \sin 70^\circ \sin 25^\circ \sin 65^\circ}{\sin 100^\circ}$

Zadanie 9 (3pkt)

Dany jest czworokąt $ABCD$. Kąt ABC w tym wielokącie jest równy 90° . Przyprostokątne trójkąta ABC mają długości $BC = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ i $AB = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie E . Wiedząc, że $\sphericalangle EBC = 20^\circ$, oblicz kąt ostry, pod którym przecinają się przekątne tego czworokąta.

Zadanie 10 (4pkt)

Ile jest liczb naturalnych, mniejszych od 10000, podzielnych przez 9, w których zapisie występują wyłącznie cyfry 0,1,2,3,4,5 oraz cyfry nie powtarzają się w zapisie danej liczby?

Zadanie 11 (4pkt)

Dane są wyrażenia:

$$a_1 = \log_3 x, \quad a_2 = \frac{1}{2 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 18} + \frac{1}{18 \cdot 26} + \frac{1}{26 \cdot 34} + \frac{1}{34 \cdot 42} + \frac{1}{42 \cdot 50}, \quad a_3 = \log_3 m.$$

Dla jakich wartości parametru x wyrażenia te spełniają następujące warunki:

- a_1, a_2, a_3 to kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego
- x, m, a_2 to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego
- $x, m \in \mathbb{R}, x \neq 0, m \neq 0$

Zadanie 12 (4pkt)

Dla jakich wartości parametru x zachodzi $f(x) > 0$, jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{4}, & x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{tg} x, & x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \end{cases} ?$$

Zadanie 13 (4pkt)

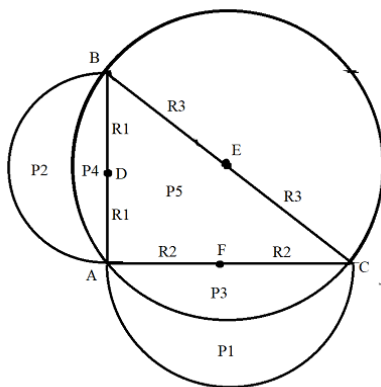
Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ podane równanie jest sprzeczne?

$$x^4 + 3m + 4mx^2 + 4m^2 + 3 = 0$$

Zadanie 14 (5pkt)

W I urnie znajdują się 2 kule białe, 3 czarne i 1 zielona. W II urnie jest 1 kula biała, 2 czarne, 2 zielone. Na początku przekładamy jedną kulę z urny I do II, następnie jeszcze jedną kulę z I do II, po czym zabieramy jedną kulę z II do I. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po tych operacjach w I urnie zostaną 2 kule białe, 2 czarne i 1 zielona.

Zadanie 15 (6pkt)



W układzie współrzędnych dana jest figura zamieszczona na rysunku. Wiedząc, że trójkąt ABC jest prostokątny, P_1, \dots, P_5 to pola odpowiednich figur, R_1, R_2, R_3 - promienie poszczególnych okręgów, $D = (3,4)$, bok AC leży na prostej $y_2 = 3x + 5$, $P_1 + P_2 = 10$ oblicz R_1, R_2, R_3, P_5 .

Zadanie 16 (7pkt)

Dany jest graniastosłup prosty o wysokości $H = 42$. Graniastosłup ten ma w podstawie trapez prostokątny taki, że suma dłuższej podstawy a i jego wysokości h jest równa $(\log 10^5 \sqrt{2} - \log \frac{\sqrt{2}}{10^5})$, zaś ramię trapezu jest równe $2h$. Dla jakich wartości parametru a graniastosłup ma największą objętość?