Model odpowiedzi i schemat oceniania do arkusza II

Zadanie 12 (3 pkt)

- Analiza warunków zadania:
  Z warunków zadania wynika, że: $2\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
- Wprowadzenie oznaczeń, naprzykład: $A = (x, y)$ i obliczenie współrzędnych wektorów

  $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{MB}$ $\qquad \overrightarrow{AM} = [2 - x, 1 - y]$, $\quad \overrightarrow{MB} = [-4, -2]$

  $2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow 2[2 - x, 1 - y] = [-4, -2] \Leftrightarrow 2(2 - x) = -4 \cap 2(1 - y) = -2 \Leftrightarrow x = 4 \cap y = 2.$
- Obliczenie współrzędnych punktu A: $\quad A = (4, 2)$.

Zadanie 13 (5 pkt)

- Wyznaczenie dziedziny D nierówności opisującej zbiór A: $D = (-1; 11)$.

  $\begin{cases} 11 - x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 11).$

- Zapisanie zbioru A w postaci przedziału liczbowego: $A = (-1; 5\rangle$

  Zapisanie nierówności $\log_{\sqrt{2}}(11 - x) - \log_{\sqrt{2}}(1 + x) \geq 0$

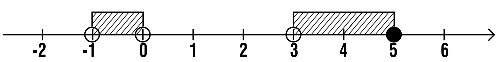
  i skorzystanie z monotoniczności funkcji logarytmicznej: $\log_{\sqrt{2}}(11 - x) \geq \log_{\sqrt{2}}(1 + x) \Leftrightarrow 11 - x \geq x + 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x \in (-1; 5\rangle$.

- Zapisanie nierówności opisującej zbiór B w postaci $x^3 - 9x \leq 0$

  i zapisanie wielomianu $x^3 - 9x$ w postaci iloczynowej $x^3 - 9x = x(x - 3)\,(x + 3)$.
- Rozwiązanie nierówności $x(x - 3)(x + 3) \leq 0$ (na przykład metodą „wężyka")

  i zapisanie zbioru B w postaci $B = (-\infty; -3\rangle \cup \langle 0; 3\rangle$
- Wyznaczenie różnicy zbiorów A i B i zaznaczenie jej na osi liczbowej:

  $A \setminus B = (-1; 0) \cup (3; 5\rangle$



Zadanie 14 (4 pkt)

- Analiza warunków zadania:

  Zauważenie, że równanie $x^2 + \cos\alpha \cdot x + 2\cos^2\alpha - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że liczba 1 leży między tymi pierwiastkami, jest równoważne stwierdzeniu:
  funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = x^2 + \cos\alpha \cdot x + 2\cos^2\alpha - 2$ spełnia warunek $f(1) < 0$.
- Obliczenie $f(1)$:

  $f(1) = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1.$

- Po podstawieniu $t = \cos\alpha$ rozwiązujemy nierówność $2t^2 + t - 1 < 0$,

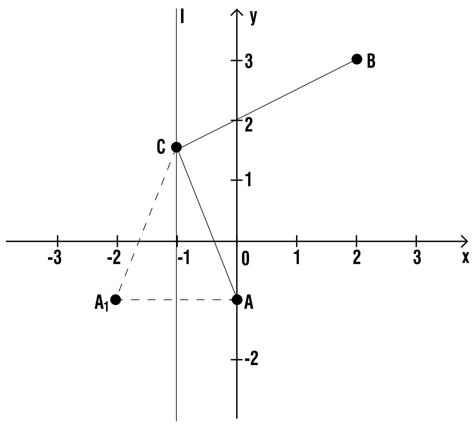
  otrzymujemy $t \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$,

- Rozwiązanie nierówności $-1 < \cos\alpha < \frac{1}{2}$ w przedziale: $\langle 0; \pi \rangle$

  i podanie odpowiedzi do zadania: $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$

Zadanie 15 (4 pkt)

- Analiza warunków zadania:
  Stwierdzenie, że obwód trójkąta *ABC* to suma długości odcinków *AB, AC* i *BC* i że odcinek *AB* ma stałą długość oraz że suma długości odcinków *AC* i *BC* to długość łamanej *ACB*.



- Zauważenie, że jeżeli punkt A_1 jest punktem symetrycznym do punktu A = (0,–1) względem prostej *l* o równaniu $x = -1$, to i długość łamanej *ACB* jest równa długości łamanej A_1CB.
- Zauważenie, że łamana A_1CB ma najkrótszą długość wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A_1, *C i B* należą do tej samej prostej, i napisanie równania prostej A_1B :
  $l{:}y = x+1$.
- Wyznaczenie punktu wspólnego prostych *l* i A_1 *B* podanie odpowiedzi:
  C = (–1, 0).

Zadanie 16 (5 pkt)

- Analiza warunków zadania:
  Prosta *l* jest styczna do okręgu *o* środku w punkcie *S* i promieniu *r* wtedy i tylko wtedy, gdy odległość punktu *S* od prostej *l* jest równa *r*.
- Wyznaczenie środka *S* i promienia *r* okręgu *o* danego równaniem:
  S = (0, –4), r = 2.
- Stwierdzenie, że oś *y* (prosta o równaniu $x = 0$) nie jest styczna do okręgu *o* i prosta *l*, do której należy punkt (0,0), która może być styczna do okręgu *o,* ma równanie w postaci: $ax - y = 0$, gdzie $a \in R$.
- Zapisanie warunków zadania zgodnie z wzorem na odległość punktu od prostej:

$$d(S,l) = r \Leftrightarrow \frac{|a \cdot 0 + 4|}{\sqrt{a^2+1}} = 2.$$

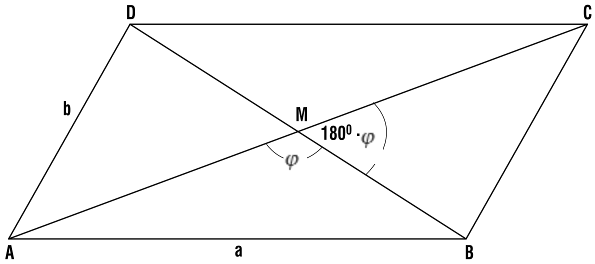
- Rozwiązanie równania $4 = 2\sqrt{a^2+1}$ i sformułowanie odpowiedzi:

$$4 = 2\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 16 = 4(a^2+1) \Leftrightarrow a = -\sqrt{3} \vee a = \sqrt{3}$$

  Są dwie proste spełniające warunki zadania:
  $l_1 : \sqrt{3} \cdot x + y = 0,\ l_2 : \sqrt{3} \cdot x - y = 0.$

Zadanie 17 (4 pkt)

■ Analiza treści zadania (na przykład za pomocą rysunku), wprowadzenie oznaczeń:



$|\sphericalangle AMB| = \varphi, |\sphericalangle BMC| = 180^\circ - \varphi$

i stwierdzenie, że dłuższy bok równoległoboku będzie leżał naprzeciw kąta rozwartego

to znaczy, $a > b \Leftrightarrow \varphi > 180^\circ - \varphi \Leftrightarrow \varphi \in (90^\circ; 180^\circ)$

$\cos\varphi < 0$. *Kosinus kąta rozwartego jest liczbą ujemną.*

■ Obliczenie sinusa kąta φ: $\sin\varphi = \frac{3}{4}$.

Ze wzoru na pole S równoległoboku: $S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$, otrzymujemy

$72 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12 \cdot \sin\varphi$, stąd $\sin\varphi = \frac{3}{5}$.

■ Obliczenie kosinusa kąta rozwartego: $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$.

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$

$\cos^2\varphi = \frac{16}{25} \wedge \cos\varphi < 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = -\frac{4}{5}$.

■ Obliczenie długości dłuższego boku na mocy twierdzenia kosinusów i sformułowanie odpowiedzi:

$a^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 232$,

$a^2 = 232 \Leftrightarrow a = \sqrt{232}$.

Długość dłuższego boku danego równoległoboku jest równa $\sqrt{232} = 2\sqrt{58}$.

Zadanie 18 (3 pkt)

■ Analiza warunków zadania i ułożenie równania:
Jeżeli liczby *a, b i c* są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego to $b^2 = ac$

■ Przekształcenie równania $\left(3^{x+1}\right)^2 = 9 \cdot 3^{x^2}$ do postaci $3^{2x+2} = 3^{x^2+2}$

i rozwiązanie otrzymanego równania: $x = 0 \vee x = 2$

Z tego, że funkcja wykładnicza jest różnowartościowa wynika, że

$3^{2x+2} = 3^{x^2+2} \Leftrightarrow 2x + 2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

■ Wybranie rozwiązania spełniającego warunki zadania i sformułowanie odpowiedzi:

Warunki zadania spełnia $x = 0$.

Zadanie 19 (6 pkt)

■ Analiza lewej strony równania:
Lewa strona równania jest sumą szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q,
w którym $a_1 = 5^{\sin x}$, $q = 5^{\sin x}$.

■ Określenie dziedziny D równania: $D=(\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi)$ i $k\in C$.

Szereg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $|q|<1$.

$|q|<1 \Leftrightarrow |5^{\sin x}|<1 \Leftrightarrow 5^{\sin x}<1 \Leftrightarrow 5^{\sin x}<5^0.$

Z faktu, że funkcja wykładnicza jest monotoniczna wynika, że:
$5^{\sin x}<5^0 \Leftrightarrow \sin x<0 \Leftrightarrow x\in(\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi)$ i $k\in C$.

■ Zapisanie lewej strony równania zgodnie z wzorem na sumę szeregu geometrycznego:

$S=\frac{a_1}{1-q}$: $\quad 5^{\sin x}+5^{2\sin x}+5^{3\sin x}+\ldots=\frac{5^{\sin x}}{1-5^{\sin x}}$.

■ Uproszczenie prawej strony równania:

$\frac{\log_5 2}{\log_5 16}=\frac{\log_5 2}{\log_5 2^4}=\frac{\log_5 2}{4\log_5 2}=\frac{1}{4}$.

■ Przekształcenie równania $\frac{5^{\sin x}}{1-5^{\sin x}}=\frac{1}{4}$ do postaci $5^{\sin x}=5^{-1}$: $\frac{5^{\sin x}}{1-5^{\sin x}}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\cdot 5^{\sin x}=1-5^{\sin x} \Leftrightarrow 5\cdot 5^{\sin x}=1 \Leftrightarrow 5^{\sin x}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{\sin x}=5^{-1}$.

■ Rozwiązanie równania: $5^{\sin x}=5^{-1}$

Z faktu, że funkcja wykładnicza jest różnowartościowa wynika, że
$5^{\sin x}=5^{-1} \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ i $k\in C$.

Zadanie 20 (6 pkt)

■ Zapisanie twierdzenia:
Założenie
Zdarzenia losowe $A, B_1, B_2\subset\Omega$ spełniają warunki: $B_1\cap B_2=\varnothing, A\subset B_1\cup B_2$, $P(B_1)\cdot P(B_2)>0$,
Teza
$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$

■ Wykorzystanie założenia, że $A\subset B_1\cup B_2$:
Z założenia, że $A\subset B_1\cup B_2$ wynika, że $A=A\cap(B_1\cup B_2)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)$.

■ Wykorzystanie założenia, że $B_1\cap B_2=\varnothing$:
Z założenia, że $B_1\cap B_2=\varnothing$ wynika, że $(A\cap B_1)\cap(A\cap B_2)=\varnothing$.

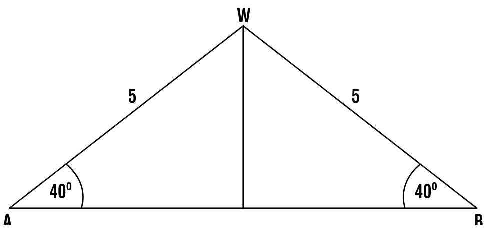
■ Zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia A:
$P(A)=P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2))=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)$.

■ Wykorzystanie założenia, że $P(B_1)\cdot P(B_2)>0$:
Z założenia, że $P(B_1)\cdot P(B_2)>0$ wynika, że $P(B_1)>0$ i $P(B_2)>0$
Można zatem określić prawdopodobieństwa warunkowe $P(A|B_1)$ i $P(A|B_2)$.

■ Wykorzystanie wzoru na prawdopodobieństwo iloczynu i podstawienie do wzoru kończy dowód:
$P(A\cap B_1)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)$ i $P(A\cap B_2)=P(A|B_2)\cdot P(B_2)$.
$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$. cnd

Zadanie 21 (4 pkt)

■ Analiza warunków zadania. Rysunek przekroju osiowego stożka, wprowadzenie oznaczeń i zapisanie warunków zadania zgodnie z przyjętymi oznaczeniami i napisanie wzoru na objętość kuli o promieniu R: tu Rysunek 4



$|AW|=|BW|=5$, $|\sphericalangle WAB|=40^\circ$, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

■ Stwierdzenie, że promień R kuli opisanej na stożku to promień R koła opisanego na trójkącie ABW.

■ Obliczenie promienia R: $R=\frac{5}{2\sin 40^\circ}$.

Na mocy twierdzenia sinusów $2R=\frac{5}{\sin 40^\circ}$, stąd $R=\frac{5}{2\sin 40^\circ}$.

■ Obliczenie objętości V kuli i podanie wyniku z wymaganą dokładnością: 246,437 cm^3

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{2\sin 40^\circ} \right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{125}{8\sin^3 40^\circ} = 246{,}437\text{cm}^3.$$

Zadanie 22 (6 pkt)

■ Wprowadzenie oznaczeń (ewentualnie rysunek) i zapisanie warunków zadania zgodnie z przyjętymi oznaczeniami:
a – długość krawędzi podstawy,
b – długość krawędzi bocznej.
Warunki zadania $12a + 6b = 36$ czyli $2a + b = 6$.

■ Napisanie wzoru na objętość V graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego zgodnie z przyjętymi oznaczeniami i określenie funkcji $V(a)$ określającej objętość tego graniastosłupa w zależności od długości krawędzi a:

$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot b = \frac{3a^2b\sqrt{3}}{2} \quad \text{i} \quad b = 6 - 2a.$$

$$V(a) = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 (6 - 2a) \quad \text{i} \quad D = (0;3).$$

■ Obliczenie $V'(a)$:

$$V'(a) = 9\sqrt{3} \cdot a(2 - a).$$

■ Obliczenie miejsc zerowych i zbadanie znaku pochodnej $V'(a)$:

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = 0,\ 0 \notin D.$$

$$V'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (0;2).$$

$$V'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (2;3).$$

■ Wyciągnięcie wniosków z poprzednich obliczeń:
Dla $a = 2$ funkcja V ma maksimum i jednocześnie w tym punkcie przyjmuje wartość największą, bo jest rosnąca w przedziale $(0;2\rangle$ i jest malejąca w przedziale $\langle 2;3)$.

■ Sformułowanie odpowiedzi:
Największą objętość ma graniastosłup o długości krawędzi podstawy 2 i długości krawędzi bocznej 2.

Uwaga.

Każde inne od zaproponowanego w modelu odpowiedzi poprawne rozwiązanie ocenia się na maksymalną dla tego zadania liczbę punktów.

Przykładowy zestaw zadań na nową maturę z matematyki przygotowali: mgr Anna Zalewska i dr Edward Stachowski – autorzy podręczników i zbiorów zadań z serii „I ty zostaniesz Euklidesem” oraz Arkuszy i Zbioru zadań „Matura od roku 2005” wydanych przez Oficynę Wydawniczo-Poligraficzną „ADAM”.