Baltic Way 2008

Gdańsk, 8 listopada 2008

wersja polska

Czas trwania zawodów: 4.5 godz.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 5 punktów.
Pytania można zadawać tylko na piśmie podczas pierwszych 30 minut.
W trakcie zawodów można używać tylko przyborów do pisania i rysowania.

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $p(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że

$$p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$$

oraz

$$p(0) = 0.$$

Zadanie 2. Udowodnić, że jeśli liczby rzeczywiste a, b i c spełniają równość $a^2+b^2+c^2=3$, to

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 3. Czy istnieje taki kąt $\alpha \in (0, \pi/2)$, że $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$, wzięte w pewnej kolejności, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Zadanie 4. Wielomian P o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 5 dla pięciu różnych liczb całkowitych. Udowodnić, że nie istnieje taka liczba całkowita x, że $-6 \leq P(x) \leq 4$ lub $6 \leq P(x) \leq 16$.

Zadanie 5. Przypuśćmy, że Romeo i Julia mają po czworościanie foremnym. Do każdego wierzchołka tych czworościanów przypisali pewną dodatnią liczbę rzeczywistą, a do każdej krawędzi – iloczyn liczb z jej końców. Następnie wpisali na każdej ścianie sumę trzech liczb przypisanych do jej trzech krawędzi. Okazało się, że cztery liczby zapisane na ścianach czworościanu Romea, są takie same jak liczby zapisane na ścianach czworościanu Julii. Czy to oznacza, że liczby przypisane wierzchołkom czworościanu Romea są takie same jak liczby przypisane wierzchołkom czworościanu Julii?

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie skończone zbiory liczb całkowitych dodatnich, o co najmniej dwóch elementach, mające własność: dla dowolnych dwóch liczb a, b $(a > b)$ należących do zbioru, liczba $\frac{b^2}{a-b}$ także należy do tego zbioru.

Zadanie 7. Ile jest takich par (m, n) liczb całkowitych dodatnich, że $m < n$ oraz

$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\ ?$$

Zadanie 8. Rozważmy taki zbiór A liczb całkowitych dodatnich, że najmniejszy element A jest równy 1001 oraz iloczyn wszystkich elementów A jest kwadratem liczby całkowitej. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość największego elementu zbioru A?

Zadanie 9. Załóżmy, że liczby całkowite dodatnie a i b spełniają równanie

$$a^b - b^a = 1008.$$

Udowodnić, że a i b przystają modulo 1008.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Zadanie 10. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej dodatniej n. Znaleźć największą możliwą wartość wyrażenia $\dfrac{S(n)}{S(16n)}$.

Zadanie 11. Rozważmy taki 84 elementowy podzbiór A zbioru $\{1, 2, \ldots, 169\}$, że suma żadnych dwóch elementów z tego podzbioru nie jest równa 169. Udowodnić, że A zawiera kwadrat liczby całkowitej.

Zadanie 12. W klasie liczącej $3n$ dzieci, każda dwójka dzieci robi wspólny prezent dla dokładnie jednego innego dziecka. Udowodnić, że dla każdej liczby nieparzystej n może być prawdziwe następujące stwierdzenie:

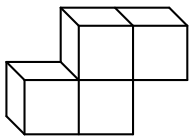
Dla dowolnej trójki dzieci A, B i C z tej klasy, jeśli A i B robią prezent dla C, to A i C robią prezent dla B.

Zadanie 13. Przed nadchodzącymi międzynarodowymi zawodami matematycznymi, uczestniczące kraje zostały poproszone o wybór spośród dziewięciu zadań kombinatorycznych. Wiedząc, jak trudno jest zwykle dojść do porozumienia, nikt nie był zaskoczony, że:

- Każdy kraj głosował na dokładnie 3 zadania;
- Każde dwa kraje głosowały na inny zbiór zadań;
- Dla dowolnych trzech krajów istniało zadanie, na które żaden nie głosował.

Znaleźć największą możliwą liczbę krajów uczestniczących w zawodach.

Zadanie 14. Czy można zbudować sześcian $4 \times 4 \times 4$ z takich klocków składających się z 4 jednostkowych sześcianów, jak na poniższym rysunku?



Zadanie 15. Na planszy $n \times n$ umieszczono kostki domina 1×2, z których każda leży na dwóch sąsiednich polach. Żadne dwie kostki nie stykają się (nawet rogami). Wiedząc, że kostki domina pokrywają 2008 pól, znaleźć najmniejszą możliwą wartość n.

Zadanie 16. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem. Okrąg o średnicy AC przecina BD w punktach P i Q. Prosta prostopadła do prostej AC przechodząca przez punkt C przecina proste AB i AD odpowiednio w punktach X i Y. Udowodnić, że punkty P, Q, X i Y leżą na jednym okręgu.

Zadanie 17. Załóżmy, że a, b, c i d są długościami boków czworokąta wpisanego w ustalony okrąg. Udowodnić, że $(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$ osiąga swoje maksimum, gdy czworokąt jest kwadratem.

Zadanie 18. Niech AB będzie średnicą okręgu S, niech l będzie prostą styczną do A, natomiast c ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą. Rozważmy wszystkie takie pary punktów X i Y leżących na l po przeciwnych stronach punktu A, że $|AX| \cdot |AY| = c$. Proste BX i BY przecinają S odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że wszystkie proste PQ przechodzą przez jeden punkt.

Zadanie 19. W okręgu o średnicy 1 narysowane są pewne cięciwy. Suma ich długości jest większa niż 19. Udowodnić, że istnieje średnica przecinająca co najmniej 7 cięciw.

Zadanie 20. Niech M będzie takim punktem leżącym na BC, a N takim punktem leżącym na AB, że AM i CN są dwusiecznymi w trójkącie ABC. Wiadomo, że

$$\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA}.$$

Udowodnić, że trójkąt ABC jest równoramienny.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info