Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

POZIOM ROZSZERZONY

11 marca 2023

Czas pracy: 180 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Wyznacz wartość parametru p, dla którego

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(pn^2+4n)^3}{3n^6-4} = -\frac{8}{3}.$$

Zadanie 2 (3 pkt)

Oblicz, ile jest liczb dwunastocyfrowych takich, że suma cyfr w każdej z tych liczb jest równa 15 i żadna cyfra nie jest zerem.

Zadanie 3 (3 pkt)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2-6}{x+3}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -3$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = \left(3, \frac{1}{2}\right)$.

ZADANIE 4 (3 PKT)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $x > y$, spełniona jest nierówność

$$x^3 + 2xy^2 > y^3 + 2x^2y.$$

Zadanie 5 (4 pkt)

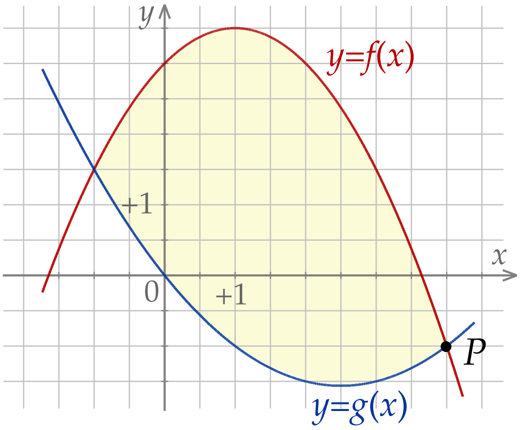
Liczby ze zbioru $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ustawiamy w losowy sposób w sześcioelementowy ciąg, przy czym każda liczba ze zbioru A jest dokładnie jednym wyrazem tego ciągu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn każdych dwóch sąsiednich wyrazów tego ciągu jest liczbą parzystą jeżeli wiadomo, że pierwszy wyraz tego ciągu jest liczbą nieparzystą.

Zadanie 6 (3 pkt)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_1 < 0$. Suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest skończona i spełnia nierówność $S \geqslant 9a_2 - 3a_1$. Wykaż, ze $3a_{2023} = 2a_{2022}$.

Informacja do zadań 7.1 i 7.2

Na obrzeżach miasta znajduje się jezioro, na którym postanowiono stworzyć tor regatowy. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej jeziora w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) za pomocą fragmentów wykresów funkcji f oraz g (zobacz rysunek).



Funkcje f oraz g są określone wzorami $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{7}{2}$ oraz $g(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{16}$. Początek toru postanowiono zlokalizować na brzegu w miejscu, któremu odpowiada w układzie współrzędnych punkt $P = (4, -1)$.

ZADANIE 7.1 (2 PKT)

Niech R będzie punktem leżącym na wykresie funkcji f. Wykaż, że odległość punktu R od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 32},$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

Zadanie 7.2 (6 pkt)

Koniec toru regatowego należy umieścić na linii brzegowej. Oblicz współrzędne punktu K, w którym należy zlokalizować koniec toru, aby długość toru (tj. odległość końca K toru od początku P) była możliwie największa. Oblicz długość najdłuższego toru.

Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że odległość dowolnego punktu R leżącego na wykresie funkcji f od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 32},$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

ZADANIE 8 (4 PKT)

Wykaż, że

$$\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Wyznacz dziedzinę tej tożsamości.

Zadanie 9 (5 pkt)

Rozwiąż nierówność

$$\frac{x-1}{x^2-9} - \frac{1}{3-x} \leqslant \frac{5}{3+x} + 2.$$

Zadanie 10 (6 pkt)

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o podstawie $ABCDEF$ i polu powierzchni bocznej równym P. Kąt między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z wierzchołka A ma miarę 2α. Objętość tego graniastosłupa jest równa

$$k \cdot \sqrt[4]{\frac{P^6 \sin^2 \alpha}{3 - 4\sin^2 \alpha}},$$

gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym. Oblicz współczynnik k.

ZADANIE 11 (5 PKT)

Przekątne kwadratu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = (3, -1)$, a jeden z jego boków jest zawarty w prostej k o równaniu $3y + x - 10 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków kwadratu $ABCD$.

ZADANIE 12 (4 PKT)

Na okręgu o średnicy 8 opisano trapez prostokątny, w którym jedna z podstaw ma długość 15. Oblicz pole tego trapezu.