Uzupełnienie zestawu wybranych wzorów matematycznych

Granica ciągu

Dane są ciągi (a_n) i (b_n), określone dla $n \geq 1$.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $b \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, o ilorazie q.

Niech S_n oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n), tzn. ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg S_n ma granicę

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Tę granicę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

Pochodna funkcji

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla $c \in R$

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, gdy $g(x) \neq 0$

<u>Pochodne niektórych funkcji</u>

Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, $n \geq 2$ dowolną liczbą naturalną.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = \dfrac{a}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-a}{x^2}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

Równanie stycznej

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ dane jest wzorem

$$y = ax + b,$$

gdzie współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pochodnej funkcji f w punkcie x_0, tzn. $a = f'\left(x_0\right)$, natomiast $b = f\left(x_0\right) - f'\left(x_0\right) \cdot x_0$.

Trygonometria

Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right) - \cos\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right) + \cos\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right) + \sin\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, przy czym $P\left(B\right) > 0$.

Prawdopodobieństwem warunkowym $P\left(A \mid B\right)$ nazywamy liczbę

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)}$$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$,
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
3. $P\left(B_i\right) > 0$ dla $1 \le i \le n$,

to dla każdego zdarzenia losowego A zawartego w Ω zachodzi równość

$$P\left(A\right) = P\left(A \mid B_1\right) \cdot P\left(B_1\right) + P\left(A \mid B_2\right) \cdot P\left(B_2\right) + \ldots + P\left(A \mid B_n\right) \cdot P\left(B_n\right)$$