

Zestaw wzorów matematycznych został przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki obowiązującej od roku 2010. Zawiera wzory przydatne do rozwiązania zadań z wszystkich działów matematyki, dlatego może służyć zdającym nie tylko podczas egzaminu, ale i w czasie przygotowań do matury.

Zestaw ten został opracowany w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej we współpracy z pracownikami wyższych uczelni oraz w konsultacji z ekspertami z okręgowych komisji egzaminacyjnych.

Mamy nadzieję, że zestaw, który przygotowaliśmy maturzystom, spełni swoje zadanie i przyczyni się do egzaminacyjnych sukcesów.

Publikacja współfinansowana przez UE w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Publikacja jest dystrybuowana bezpłatnie.

SPIS TREŚCI

| | |
|--|----|
| 1. Wartość bezwzględna liczby..... | 1 |
| 2. Potęgi i pierwiastki..... | 1 |
| 3. Logarytmy..... | 2 |
| 4. Silnia. Współczynnik dwumianowy | 2 |
| 5. Wzór dwumianowy Newtona..... | 2 |
| 6. Wzory skróconego mnożenia..... | 3 |
| 7. Ciągi..... | 3 |
| 8. Funkcja kwadratowa | 4 |
| 9. Geometria analityczna..... | 4 |
| 10. Planimetria | 6 |
| 11. Stereometria | 12 |
| 12. Trygonometria..... | 14 |
| 13. Kombinatoryka..... | 15 |
| 14. Rachunek prawdopodobieństwa | 15 |
| 15. Parametry danych statystycznych | 16 |
| 16. Tablica wartości funkcji trygonometrycznych..... | 17 |

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geq 0 \qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad |x - y| \leq |x| + |y| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geq 0$ mamy warunki równoważne:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq r &\Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r &\Leftrightarrow x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r \end{aligned}$$

2. POTĘGI I PIERWIĄSTKI

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

— * —

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

- dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$
- dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{r \cdot s} & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b} \right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

3. LOGARYTMY

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę c :

$$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$\log x$ oraz $\lg x$ oznacza $\log_{10} x$.

4. SILNIA. WSPÓLCZYNNIK DWUMIANOWY

Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Dla liczb całkowitych n , k spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy współczynnik

dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

5. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb a , b mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb a, b :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) & a^2 - 1 &= (a-1)(a+1) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) & a^3 - 1 &= (a-1)(a^2 + a + 1) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) & a^3 + 1 &= (a+1)(a^2 - a + 1) \\ & & a^n - 1 &= (a-1)(1 + a + \dots + a^{n-1})\end{aligned}$$

7. CIĄGI

• Ciąg arytmetyczny

Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

• Ciąg geometryczny

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

• Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

8. FUNKCJA KWADRATOWA

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in R$.

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych (p, q) .

Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$), zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta \geq 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wzory Viéte'a

Jeżeli $\Delta \geq 0$ to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

9. GEOMETRIA ANALITYCZNA

• Odcinek

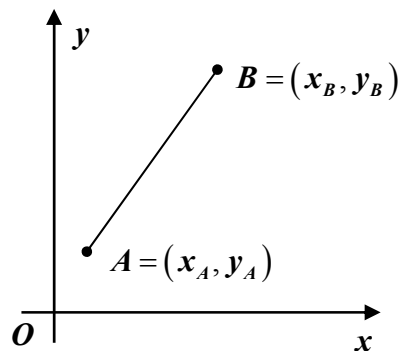
Długość odcinka o końcach w punktach

$A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



- Wektory

Współrzędne wektora \overline{AB} :

$$\overline{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

- Prosta

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox ; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy ; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

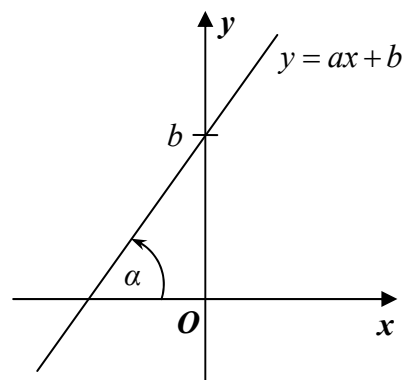
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy , to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.



Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- Prosta i punkt

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest dana wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Para prostych

Dwie proste o równaniach kierunkowych

$$y = a_1x + b_1 \qquad y = a_2x + b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

- są równoległe, gdy $a_1 = a_2$
- są prostopadłe, gdy $a_1a_2 = -1$
- tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2} \right|$

Dwie proste o równaniach ogólnych:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

- są równoległe, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$
- są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
- tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$

- Trójkąt

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, jest dane wzorem:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

Środek ciężkości trójkąta ABC , czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

- Przekształcenia geometryczne

- przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x + a, y + b)$
- symetria względem osi Ox przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x, -y)$
- symetria względem osi Oy przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, y)$
- symetria względem punktu (a, b) przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (2a - x, 2b - y)$
- jednokładność o środku w punkcie $(0, 0)$ i skali $s \neq 0$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx, sy)$

- Równanie okręgu

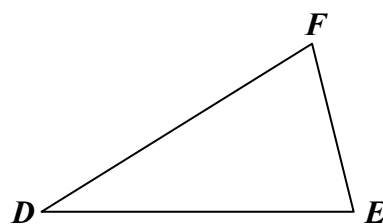
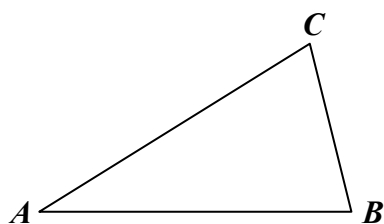
Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

lub $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ gdy $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$

10. PLANIMETRIA

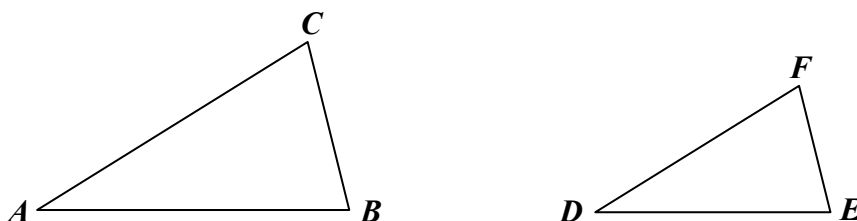
- Cechy przystawiania trójkątów



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są przystające ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech przystawania trójkątów**:

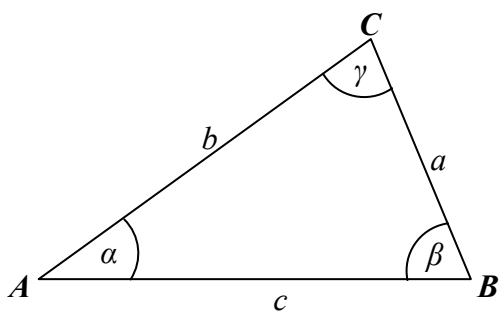
- cecha przystawania „bok – bok – bok”:
odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości: $|AB|=|DE|$,
 $|AC|=|DF|$, $|BC|=|EF|$
- cecha przystawania „bok – kąt – bok”:
dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np. $|AB|=|DE|$, $|AC|=|DF|$,
 $|\sphericalangle BAC|=|\sphericalangle EDF|$
- cecha przystawania „kąt – bok – kąt”:
jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np. $|AB|=|DE|$, $|\sphericalangle BAC|=|\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC|=|\sphericalangle DEF|$

- Cechy podobieństwa trójkątów



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są podobne ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

- cecha podobieństwa „bok – bok – bok”:
długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$
- cecha podobieństwa „bok – kąt – bok”:
długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$, $|\sphericalangle BAC|=|\sphericalangle EDF|$
- cecha podobieństwa „kąt – kąt – kąt”:
dwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też i trzecie kąty obu trójkątów są przystające): $|\sphericalangle BAC|=|\sphericalangle EDF|$,
 $|\sphericalangle ABC|=|\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle ACB|=|\sphericalangle DFE|$



Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie ABC:

a, b, c – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C

$2p = a + b + c$ – obwód trójkąta

α, β, γ – miary kątów przy wierzchołkach A, B, C

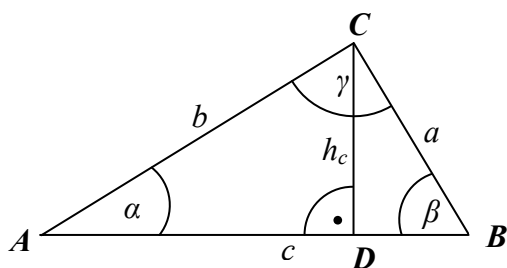
h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone z wierzchołków A, B, C

R, r – promienie okręgów opisanego i wpisanego

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie ABC kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym



Założmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$R = \frac{1}{2}c \quad r = \frac{a+b-c}{2} = p-c$$

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

- Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- Trójkąt równoboczny

a – długość boku

h – wysokość trójkąta

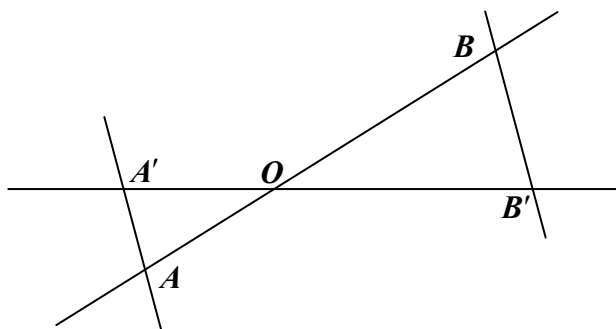
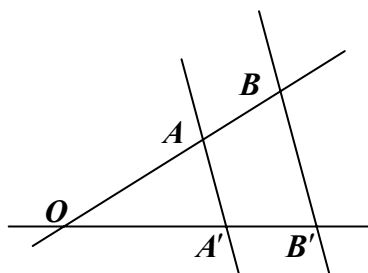
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

- Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste równoległe AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O , to

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$$



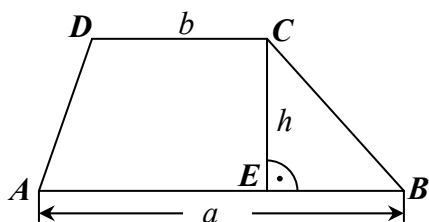
- Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli proste AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O oraz

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|},$$

to proste AA' i BB' są równoległe.

- Czworokąty

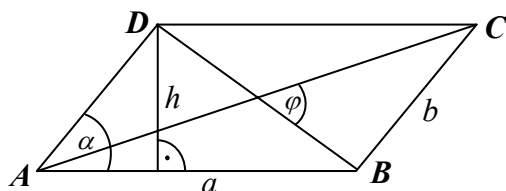


Trapez

Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

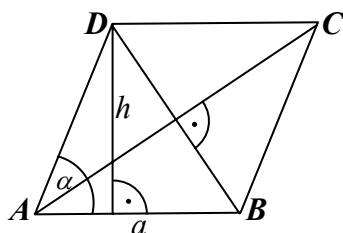


Równoległobok

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \varphi$$

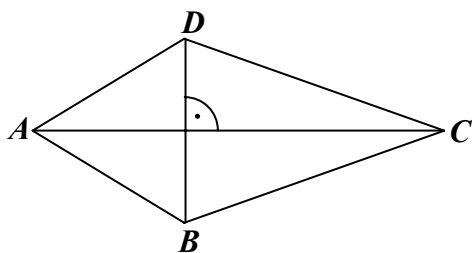


Romb

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$$P = ah = a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



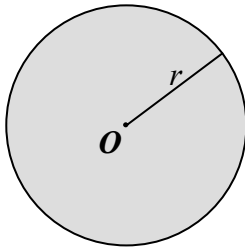
Deltoid

Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

- Koło



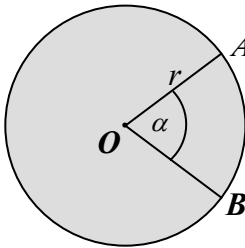
Wzór na pole koła o promieniu r :

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu r :

$$Ob = 2\pi r$$

- Wycinek koła



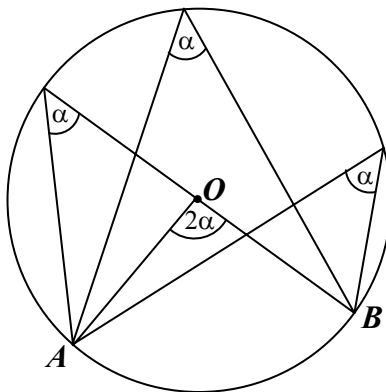
Wzór na pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Długość łuku wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym

w stopniach: $l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$

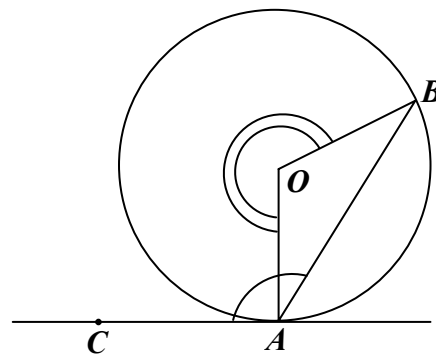
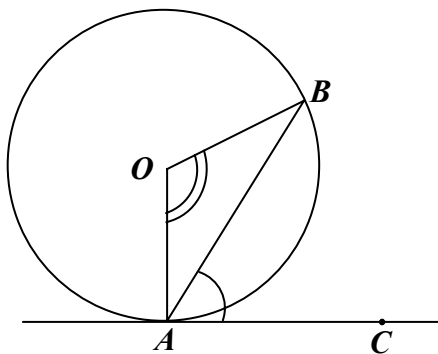
- Kąty w okręgu



Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

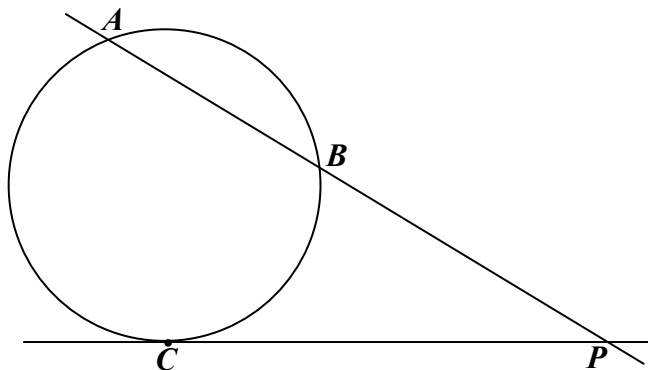


Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB . Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A . Wtedy $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB .

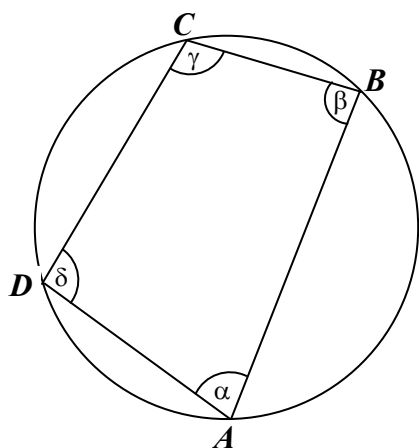
- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P , to

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



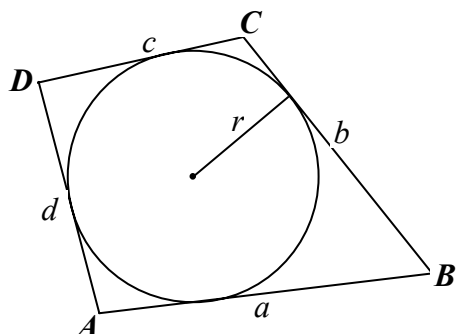
- Okrąg opisany na czworokącie



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180° :

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

- Okrąg wpisany w czworokąt

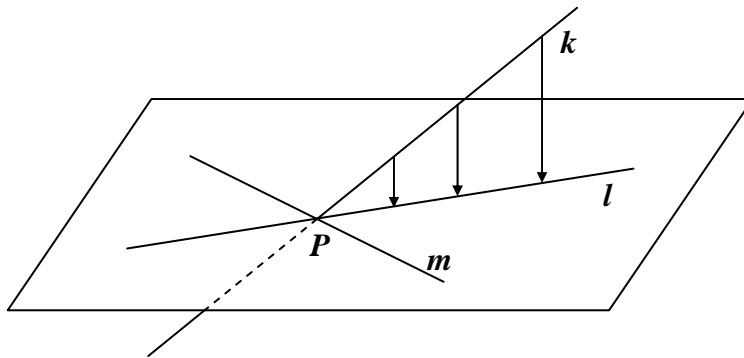


W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$

11. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych



Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P . Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P . Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l .

- Oznaczenia

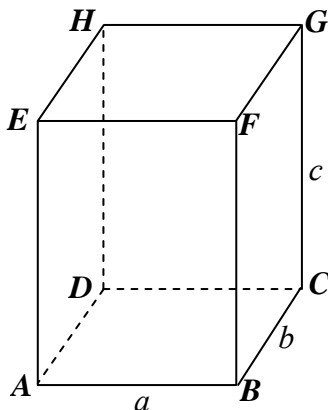
P – pole powierzchni całkowitej

P_b – pole powierzchni bocznej

P_p – pole powierzchni podstawy

V – objętość

- Prostopadłościan

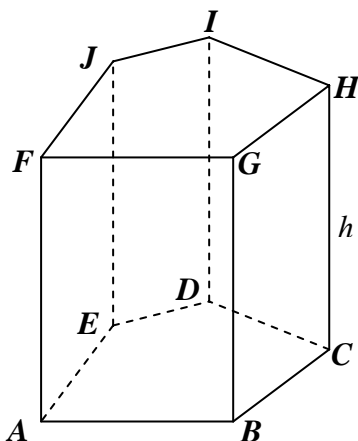


$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

- Gnaniastosłup prosty

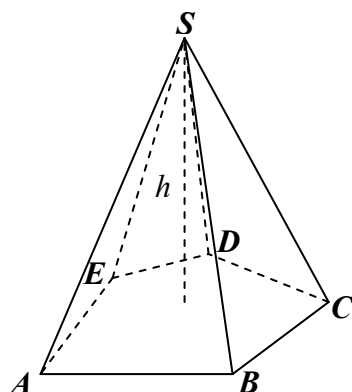


$$P_b = 2p \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy gnaniastosłupa

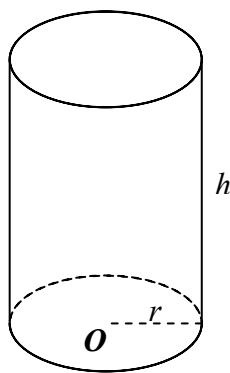
- Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

- Walec



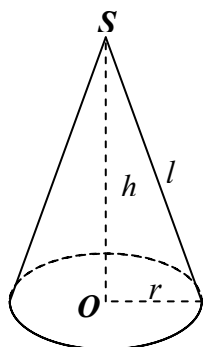
$$P_b = 2\pi r h$$

$$P = 2\pi r (r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy,
 h wysokością walca

- Stożek



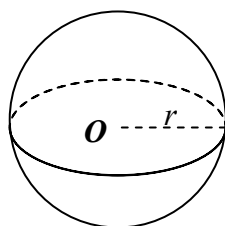
$$P_b = \pi r l$$

$$P = \pi r (r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy,
 h wysokością, l długością tworzącej stożka

- Kula



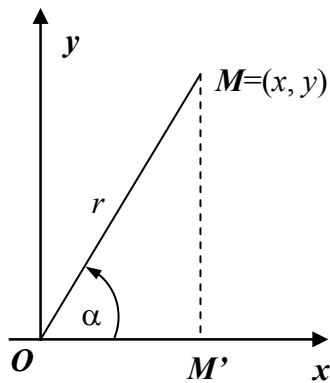
$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli

12. TRYGNOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych



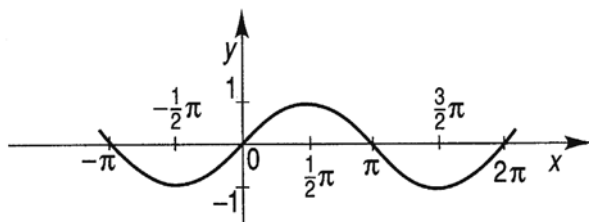
$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

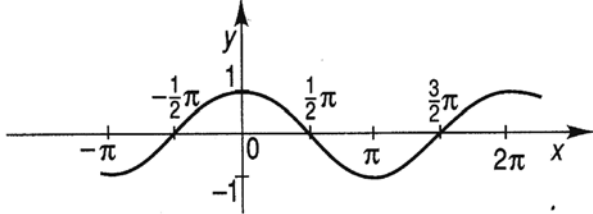
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu M

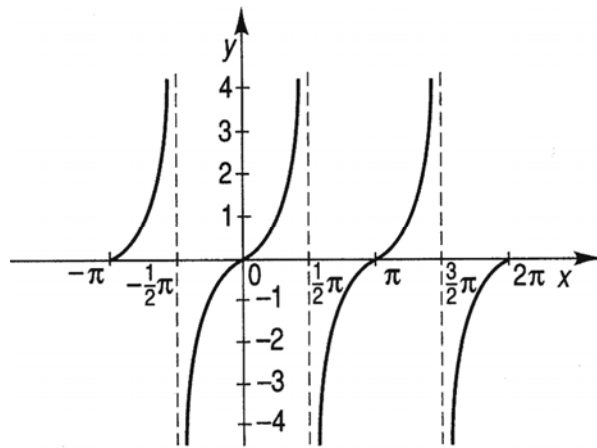
- Wykresy funkcji trygonometrycznych



$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$

- Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k - \text{całkowite}$$

- Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|----------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | nie istnieje |

- Funkcje sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α , β zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Ponadto mamy równości:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

- Funkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

13. KOMBINATORYKA

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k .

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k ($1 \leq k \leq n$) różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Permutacje

Liczba sposobów, na które $n \geq 1$ różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- Kombinacje

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k ($0 \leq k \leq n$) elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\Omega) = 1 \quad \Omega - \text{zdarzenie pewne}$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad \emptyset - \text{zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór } \Omega)$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{gdy } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A), \text{ gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia } A$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \text{ dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

- Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A , zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω .

15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna n liczb a_1, a_2, \dots, a_n jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- Średnia ważona

Średnia ważona n liczb a_1, a_2, \dots, a_n , którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi w_1, w_2, \dots, w_n jest równa:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna n nieujemnych liczb a_1, a_2, \dots, a_n jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)
- dla n parzystych: $\frac{1}{2} \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1} \right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancją n danych liczbowych a_1, a_2, \dots, a_n o średniej arytmetycznej \bar{a} jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

16. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

| α [°] | $\sin \alpha$ $\cos \beta$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | β [°] |
|--------------|-------------------------------|----------------------------|-------------|
| 0 | 0,0000 | 0,0000 | 90 |
| 1 | 0,0175 | 0,0175 | 89 |
| 2 | 0,0349 | 0,0349 | 88 |
| 3 | 0,0523 | 0,0524 | 87 |
| 4 | 0,0698 | 0,0699 | 86 |
| 5 | 0,0872 | 0,0875 | 85 |
| 6 | 0,1045 | 0,1051 | 84 |
| 7 | 0,1219 | 0,1228 | 83 |
| 8 | 0,1392 | 0,1405 | 82 |
| 9 | 0,1564 | 0,1584 | 81 |
| 10 | 0,1736 | 0,1763 | 80 |
| 11 | 0,1908 | 0,1944 | 79 |
| 12 | 0,2079 | 0,2126 | 78 |
| 13 | 0,2250 | 0,2309 | 77 |
| 14 | 0,2419 | 0,2493 | 76 |
| 15 | 0,2588 | 0,2679 | 75 |
| 16 | 0,2756 | 0,2867 | 74 |
| 17 | 0,2924 | 0,3057 | 73 |
| 18 | 0,3090 | 0,3249 | 72 |
| 19 | 0,3256 | 0,3443 | 71 |
| 20 | 0,3420 | 0,3640 | 70 |
| 21 | 0,3584 | 0,3839 | 69 |
| 22 | 0,3746 | 0,4040 | 68 |
| 23 | 0,3907 | 0,4245 | 67 |
| 24 | 0,4067 | 0,4452 | 66 |
| 25 | 0,4226 | 0,4663 | 65 |
| 26 | 0,4384 | 0,4877 | 64 |
| 27 | 0,4540 | 0,5095 | 63 |
| 28 | 0,4695 | 0,5317 | 62 |
| 29 | 0,4848 | 0,5543 | 61 |
| 30 | 0,5000 | 0,5774 | 60 |
| 31 | 0,5150 | 0,6009 | 59 |
| 32 | 0,5299 | 0,6249 | 58 |
| 33 | 0,5446 | 0,6494 | 57 |
| 34 | 0,5592 | 0,6745 | 56 |
| 35 | 0,5736 | 0,7002 | 55 |
| 36 | 0,5878 | 0,7265 | 54 |
| 37 | 0,6018 | 0,7536 | 53 |
| 38 | 0,6157 | 0,7813 | 52 |
| 39 | 0,6293 | 0,8098 | 51 |
| 40 | 0,6428 | 0,8391 | 50 |
| 41 | 0,6561 | 0,8693 | 49 |
| 42 | 0,6691 | 0,9004 | 48 |
| 43 | 0,6820 | 0,9325 | 47 |
| 44 | 0,6947 | 0,9657 | 46 |
| 45 | 0,7071 | 1,0000 | 45 |

| α [°] | $\sin \alpha$ $\cos \beta$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | β [°] |
|--------------|-------------------------------|----------------------------|-------------|
| 46 | 0,7193 | 1,0355 | 44 |
| 47 | 0,7314 | 1,0724 | 43 |
| 48 | 0,7431 | 1,1106 | 42 |
| 49 | 0,7547 | 1,1504 | 41 |
| 50 | 0,7660 | 1,1918 | 40 |
| 51 | 0,7771 | 1,2349 | 39 |
| 52 | 0,7880 | 1,2799 | 38 |
| 53 | 0,7986 | 1,3270 | 37 |
| 54 | 0,8090 | 1,3764 | 36 |
| 55 | 0,8192 | 1,4281 | 35 |
| 56 | 0,8290 | 1,4826 | 34 |
| 57 | 0,8387 | 1,5399 | 33 |
| 58 | 0,8480 | 1,6003 | 32 |
| 59 | 0,8572 | 1,6643 | 31 |
| 60 | 0,8660 | 1,7321 | 30 |
| 61 | 0,8746 | 1,8040 | 29 |
| 62 | 0,8829 | 1,8807 | 28 |
| 63 | 0,8910 | 1,9626 | 27 |
| 64 | 0,8988 | 2,0503 | 26 |
| 65 | 0,9063 | 2,1445 | 25 |
| 66 | 0,9135 | 2,2460 | 24 |
| 67 | 0,9205 | 2,3559 | 23 |
| 68 | 0,9272 | 2,4751 | 22 |
| 69 | 0,9336 | 2,6051 | 21 |
| 70 | 0,9397 | 2,7475 | 20 |
| 71 | 0,9455 | 2,9042 | 19 |
| 72 | 0,9511 | 3,0777 | 18 |
| 73 | 0,9563 | 3,2709 | 17 |
| 74 | 0,9613 | 3,4874 | 16 |
| 75 | 0,9659 | 3,7321 | 15 |
| 76 | 0,9703 | 4,0108 | 14 |
| 77 | 0,9744 | 4,3315 | 13 |
| 78 | 0,9781 | 4,7046 | 12 |
| 79 | 0,9816 | 5,1446 | 11 |
| 80 | 0,9848 | 5,6713 | 10 |
| 81 | 0,9877 | 6,3138 | 9 |
| 82 | 0,9903 | 7,1154 | 8 |
| 83 | 0,9925 | 8,1443 | 7 |
| 84 | 0,9945 | 9,5144 | 6 |
| 85 | 0,9962 | 11,4301 | 5 |
| 86 | 0,9976 | 14,3007 | 4 |
| 87 | 0,9986 | 19,0811 | 3 |
| 88 | 0,9994 | 28,6363 | 2 |
| 89 | 0,9998 | 57,2900 | 1 |
| 90 | 1,0000 | - | 0 |