Model odpowiedzi do arkusza II i schemat oceniania

Za każdą czynność oznaczoną ◆ otrzymujesz jeden punkt.

Zadanie 10.

◆ Zapisanie odległości punktu x od punktów 1 i 3 oraz warunków zadania; $|x-1|$, $|x-3|$, $|x-1|+|x-3|<4$.

◆ Zapisanie $|x-1|+|x-3|<4$. dla $x \in (-\infty; 1\rangle\ -x+1-x+3<4)$

Zapisanie nierówności $|x-1|+|x-3|<4$ dla $x \in (1;3\rangle$; $x-1+3-x<4$.

Zapisanie nierówności $|x-1|+|x-3|<4$ dla $x \in (3;+\infty)$; $x-1+x-3<4$.

◆ Rozwiązanie poszczególnych nierówności: $x \in (0;1\rangle$; $x \in (1;3\rangle$; $x \in (3;4)$

◆ Sformułowanie odpowiedzi; $x \in (0;4)$.

Zadanie 11.

◆ Stwierdzenie, że układ równań nie ma rozwiązania, gdy jego wyznaczniki spełniają warunki: $W=0 \wedge (W_x \neq 0 \vee W_y \neq 0)$.

◆ Obliczenie wyznaczników; $W=\cos^2\alpha+\sin\alpha-1$, $W_x=\sin\alpha-1$, $W_y=\cos\alpha$.

◆ Rozwiązanie warunku $W=0$; $\sin\alpha=0$ lub $\sin\alpha=1$.

$$\cos^2\alpha+\sin\alpha-1=0 \Leftrightarrow 1-\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0 \Leftrightarrow \sin\alpha(1-\sin\alpha)=0 \Leftrightarrow \sin\alpha=0 \vee \sin\alpha=1.$$

◆ Analiza warunku $\sin\alpha=0$;

Dla $\sin\alpha=0$; $W=0$ i $W_x=-1$ i $(W_y=1$ lub $W_y=-1)$ – układ równań nie ma rozwiązania.

◆ Analiza warunku $\sin\alpha = 1$;

Dla $\sin\alpha = 1$; $W = 0$ i $W_x = 0$ i $W_y = 0$ – układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań.

◆ Sformułowanie odpowiedzi; Warunki zadania są spełnione, gdy $\alpha = 0$ lub $\alpha = \pi$ lub $\alpha = 2\pi$.

Zadanie 12.

◆ Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie warunków zadania;

x – prędkość pociągu pospiesznego w km/h.

$x + 16$ – prędkość pociągu ekspresowego w km/h.

$\frac{48}{x}$ – czas przejazdu pociągu pospiesznego w godzinach.

$\frac{48}{x+16}$ – czas przejazdu pociągu ekspresowego w godzinach.

6 min = $\frac{1}{10}$ h.

◆ Ułożenie równania zgodnego z warunkami zadania;

$\frac{48}{x} - \frac{48}{x+16} = \frac{1}{10}$ i $x > 0$.

◆ Przekształcenie równania $\frac{48}{x} - \frac{48}{x+16} = \frac{1}{10}$ i $x > 0$ do postaci $x^2 + 16x - 7680 = 0$.

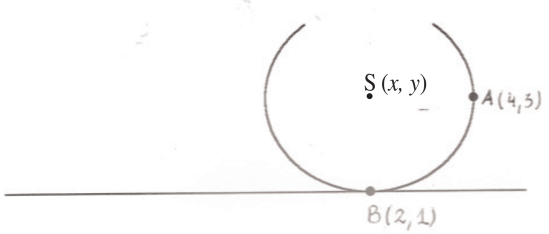
◆ Rozwiązanie równania $x^2 + 16x - 7680 = 0$; $x = 80$ lub $x = -96$.

$x = -96$ – 96 nie należy do dziedziny równania.

◆ Sformułowanie odpowiedzi; prędkość pociągu pospiesznego jest równa 80 km/h, ekspresowego – 96 km/h.

Zadanie 13.

◆ Narysowanie rysunku pomocniczego, wprowadzenie oznaczeń i analiza warunków zadania;



Stwierdzenie, na podstawie warunku styczności, że $x = 2$;

◆ Stwierdzenie, że $|AS| = |BS|$ i napisanie równania $\sqrt{(4-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (y-1)^2}$;

◆ Rozwiązanie równania $\sqrt{(4-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (y-1)^2}$; $y = 3$.

◆ Obliczenie r i napisanie równania okręgu o; $r = |SB| = 2$, $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

◆ Stwierdzenie, że oś y, czyli prosta k o równaniu $x = 0$, jest styczna do okręgu o;

◆ Stwierdzenie, że prosta m o równaniu $ax - y = 0$ jest styczna do okręgu o wtedy i tylko wtedy, gdy $d=(S,m) = r$ i napisanie równania $\frac{|2a-3|}{\sqrt{a^2+1}} = 2$.

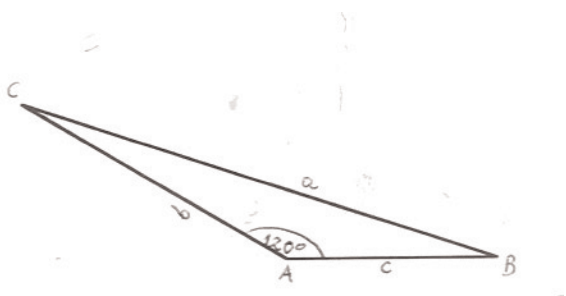
◆ Rozwiązanie równania $\frac{|2a-3|}{\sqrt{a^2+1}} = 2$; $a = \frac{5}{12}$.

◆ Napisanie równania prostej m; $5x - 12y = 0$.

Zadanie 14.

- Wprowadzenie oznaczeń, na przykład na rysunku, analiza warunków zadania i zapisanie na podstawie twierdzenia sinusów, zgodnie z przyjętymi oznaczeniami i warunkami zadania, wzoru na promień R okręgu opisanego;

$R=\frac{a}{2\sin 120^\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



- Stwierdzenie, że a można obliczyć z twierdzenie kosinusów;
- Obliczenie $a=4\sqrt{19}$ cm. $a^2=8^2+12^2-2\cdot 8\cdot 12\cos 120^o=208-192\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=340$, $a=\sqrt{340}=4\sqrt{19}$.
- Obliczenie R; $R=\frac{4\sqrt{57}}{3}$ cm.

Zadanie 15.

- Podstawienie, na przykład $t=|x|$ i $t\geq 0$; $t^2+(3-m^2)t+m^2+m-2=0$.
- Stwierdzenie, że równanie wyjściowe ma dokładnie trzy rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $t^2+bt+c=0$ ma dokładnie dwa rozwiązania takie, że jednym z nich jest liczba 0, a drugie jest liczbą dodatnią;
- Sformułowanie warunków, w których równanie $t^2+bt+c=0$ ma dokładnie dwa rozwiązania takie, że jednym z nich jest liczba 0, a drugie jest liczbą dodatnią: 1. $c=0$ i 2. $b<0$.

Rozwiązanie kolejnych warunków;

- 1. $c=0 \Leftrightarrow m=1$ lub $m=-2$.
- 2. $b<0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$
- Sformułowanie odpowiedzi; Dla $m=-2$ równanie $x^2+(3-m^2)|x|+m^2+m-2=0$ ma dokładnie trzy rozwiązania.

Zadanie 16.

- Sprawdzenie, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$;
- Podzielenie wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-1$; $W(x):(x-1)=x^2+x-m+1$.
- Zapisanie wielomianu $W(x)$ w postaci iloczynu; $W(x)=(x-1)\cdot\left(x^2+x-m+1\right)$.

◆ Analiza warunków zadania; trójmian $x^2+x-m+1$ ma dwa różne pierwiastki i liczba 1 nie jest pierwiastkiem tego trójmianu.

$$\begin{cases} 1) \quad \Delta > 0 \\ 2) \quad 1+1-m+1 \neq 0. \end{cases}$$

◆ Rozwiązanie warunków i sformułowanie odpowiedzi; $m \in \left(\frac{3}{4};3\right) \cup (3;+\infty)$.

Zadanie 17.

◆ Zapisanie założenia i tezy twierdzenia;

Założenie: Istnieje liczba r taka, że dla każdego $n \in N, a_{n+1}-a_n=r$.

Teza: Istnieje liczba s taka, że dla każdego $n \in N, b_{n+1}-b_n=s$.

Przeprowadzenie dowodu

◆ $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}+2a_{n+2}+4a_{n+3}-a_n-2a_{n+1}-4a_{n+2}$

◆ $a_{n+1}-a_n+2a_{n+2}-2a_{n+1}+4a_{n+3}-4a_{n+2}=r+2r+4r=7r$.

◆ Konkluzja; Ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, bo istnieje taka liczba $s=7r$, że $b_{n+1}-b_n=s$ i $n \in N$.

Zadanie 18.

◆ Analiza warunków zadania; ciąg geometryczny, w którym $a_1=1$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz q tego ciągu spełnia warunek $-1<q\leq 1$.

◆ Podanie ilorazu q i zapisanie warunku $q=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x$, $-1<\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\leq 1$.

◆ Rozwiązanie warunku $-1<\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\leq 1$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}, x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{3}\right\rangle\cup\left\langle\frac{2}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{3}\pi;2\pi\right\rangle$.

b) Wyznaczenie dziedziny równania; $|q|<1, x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{3}\pi;2\pi\right\rangle$.

◆ Zapisanie sumy S szeregu geometrycznego; $S=\dfrac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x}$.

◆ Zapisanie równania $\dfrac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x}=\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

◆ Przekształcenie równania $\dfrac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x}=\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ do postaci $\sin x=-\frac{1}{2}$.

◆ Rozwiązanie równania $\sin x=-\frac{1}{2}$ i podanie odpowiedzi; $x=\frac{7}{6}\pi$ lub $x=\frac{11}{6}\pi$.

UWAGA. Każde inne od zaproponowanego w modelu odpowiedzi poprawne rozwiązanie ocenia się na maksymalną dla tego zadania liczbę punktów.

Przykładowy zestaw zadań na nową maturę z matematyki przygotowali: ANNA ZALEWSKA I DR EDWARD STACHOWSKI