PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

23 MARCA 2019

CZAS PRACY: 180 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Ile liczb pierwszych spełnia nierówność $|7-|x|| \geqslant |x|+7$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) nieskończenie wiele

ZADANIE 2 (1 PKT)

W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB dane są: $|AB| = 6$ oraz $|\measuredangle BAC| = 15^\circ$. Pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe

A) 144π B) 12π C) 48π D) 36π

ZADANIE 3 (1 PKT)

Liczba $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$ jest równa

A) 1 B) -1 C) $5-2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}-5$

ZADANIE 4 (1 PKT)

Okresem podstawowym funkcji $f(x) = 3\cos(4x+5)$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ jest liczba

A) 2π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) 3π

ZADANIE 5 (1 PKT)

Ciąg (a_n) określony jest w następujący sposób $\begin{cases} a_1 = -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}a_n = -a_{n-1} \text{ dla } n \geqslant 2. \end{cases}$ Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

A) $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3-3\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

ZADANIE 6 (2 PKT)

Zdarzenia losowe A, B są zawarte w Ω oraz $P(B) > 0,5$. Wykaż, że

$$2P(A') + P(A|B) < 2.$$

ZADANIE 7 (2 PKT)

Wykres funkcji $f(x) = \frac{2x-1}{3-5x}$ przesunięto o wektor $[-3,2]$ i otrzymano wykres funkcji $y = g(x)$. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{g(x)}.$$

ZADANIE 8 (3 PKT)

Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ w punkcie P przecina prostą o równaniu $x - y\sqrt{3} + 3 = 0$ pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Oblicz współrzędne punktu P.

ZADANIE 9 (3 PKT)

Udowodnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ prawdziwa jest nierówność

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right) < \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

ZADANIE 10 (3 PKT)

Liczby a i b są rozwiązaniami równania $x^2 - 1107x + 9 = 0$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\log_3 \sqrt[a]{a} + \frac{1}{a\log_b 3} + \log_3 \sqrt[b]{b} + \frac{1}{b\log_a 3}.$$

ZADANIE 11 (3 PKT)

Podstawą prostopadłościanu $ABCDEFGH$ o wysokości 4 jest kwadrat $ABCD$ o boku 3. Oblicz sinus kąta, pod którym przecinają się przekątne BH i CE tego prostopadłościanu.

ZADANIE 12 (3 PKT)

Dany jest nieskończony ciąg sześcianów (S_n) określony dla $n \geqslant 1$. Krawędź pierwszego z nich jest równa $a_1 = a$. Krawędź drugiego z tych sześcianów ma długość a_2 równą różnicy długości przekątnej i przekątnej ściany pierwszego sześcianu. Analogicznie, trzeci sześcian ma krawędź a_3 o długości równej różnicy długości przekątnej i przekątnej ściany drugiego sześcianu, itd. Oblicz sumę pól powierzchni wszystkich sześcianów tworzących ciąg (S_n).

ZADANIE 13 (4 PKT)

Do dwóch stycznych zewnętrznie okręgów poprowadzono dwie wspólne styczne: jedną zewnętrzną i jedną wewnętrzną. Proste te przecinają się pod kątem 60°. Wyznacz stosunek długości promieni tych okręgów.

ZADANIE 14 (4 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametrów a, b i c, dla których wielomian

$$W(x) = 25(x-2)^2 + a(x+1)^3 + b(x-1)^5 + c$$

jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

ZADANIE 15 (5 PKT)

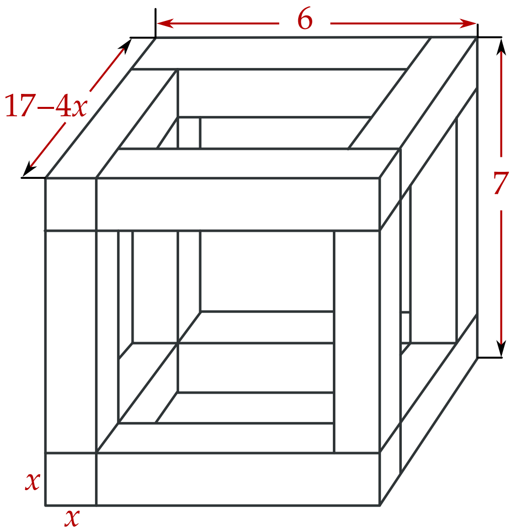
Do windy na parterze budynku wsiadło 8 osób, po czym każda z nich w sposób losowy wysiadła na jednym z pięciu pięter budynku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na dwóch różnych piętrach wysiadły po trzy osoby?

ZADANIE 16 (6 PKT)

Punkt $A=(-1,-7)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka B są liczbami dodatnimi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

ZADANIE 17 (7 PKT)

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x. Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



a) Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji V.

c) Oblicz tę wartość x, dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.