

# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

[WWW.ZADANIA.INFO](http://WWW.ZADANIA.INFO)

POZIOM ROZSZERZONY

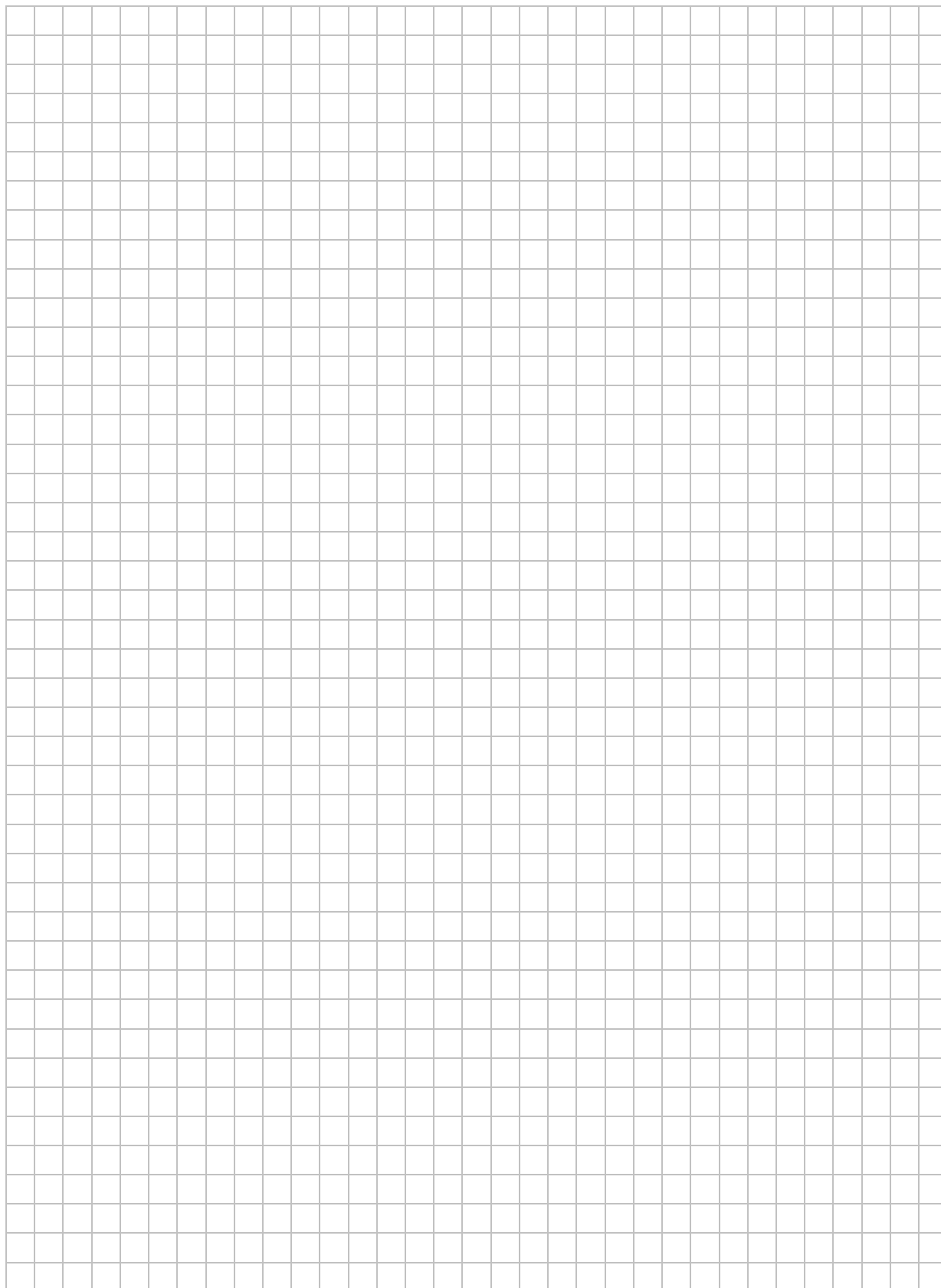
16 KWIETNIA 2011

**CZAS PRACY: 180 MINUT**

ZADANIE 1 (4 PKT.)

Wykaż, że jeżeli  $a \in (0, 1)$  i  $b > 1$  to prawdziwa jest nierówność

$$\log_a b + \frac{1}{4} \log_b a + 1 \leq 0.$$



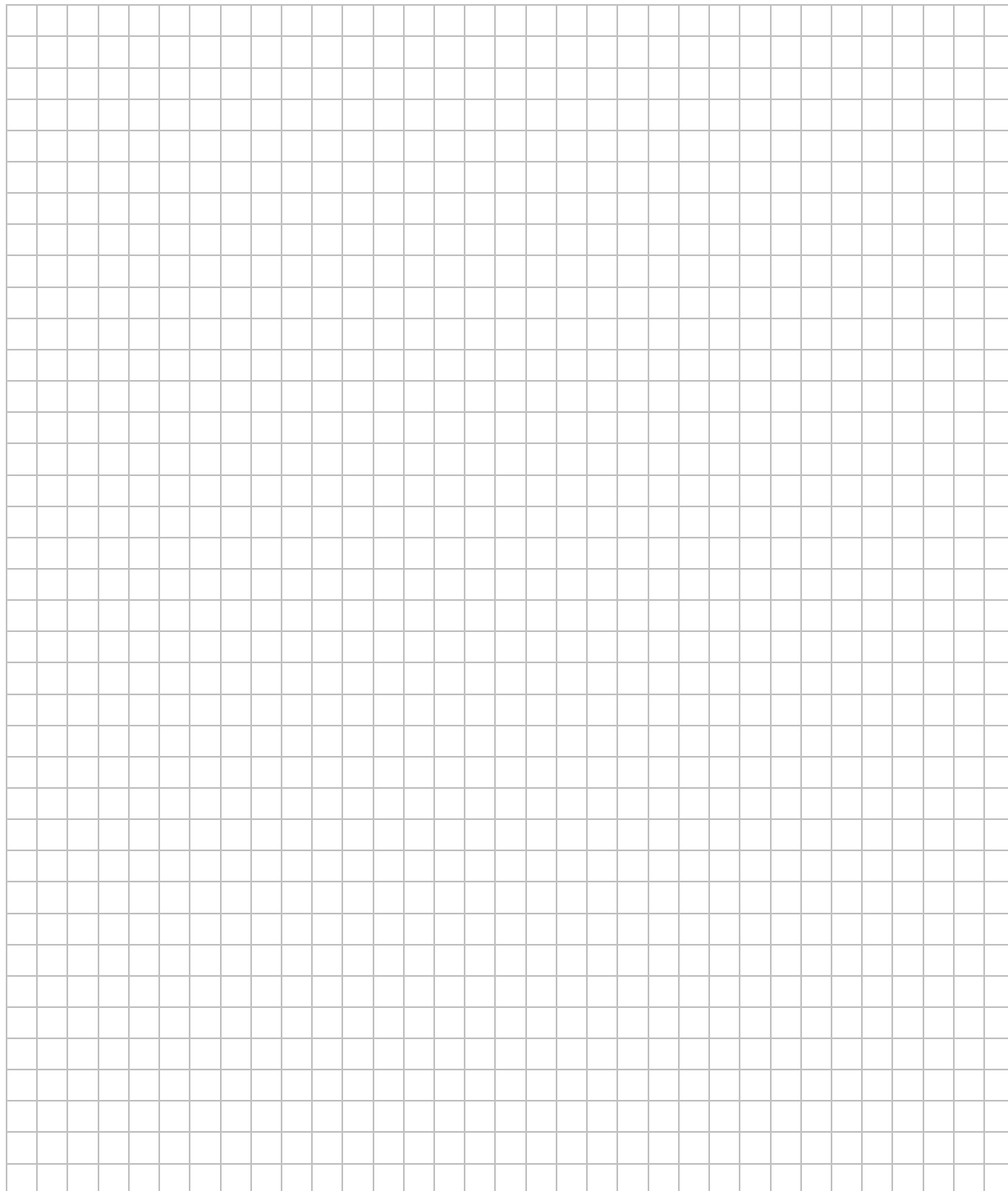
## ZADANIE 2 (5 PKT.)

Ciąg  $(a_n)$ , gdzie  $n \geq 1$  dany jest wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{6} \\ (\sqrt{2} + 1)a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \end{cases}$$

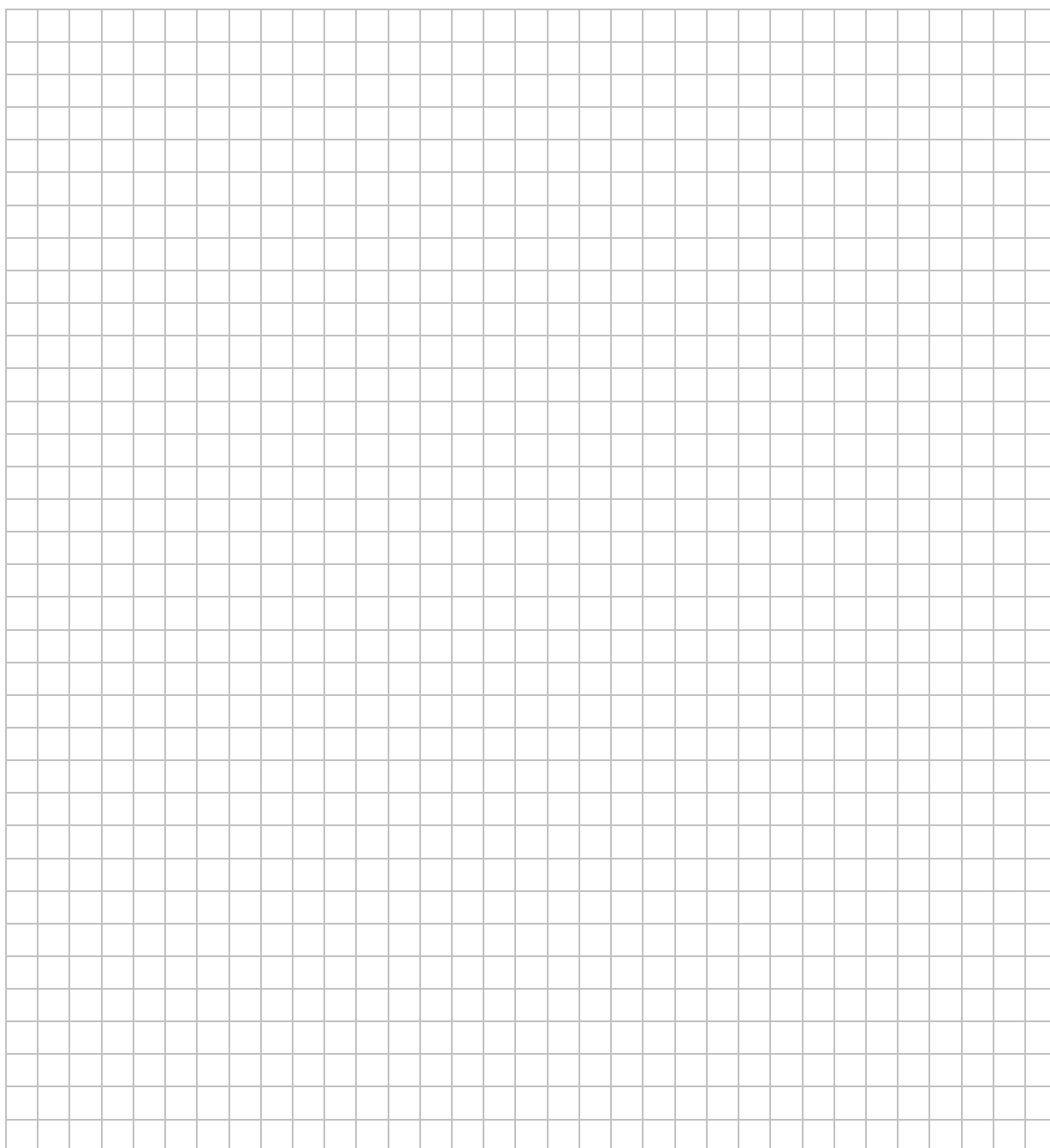
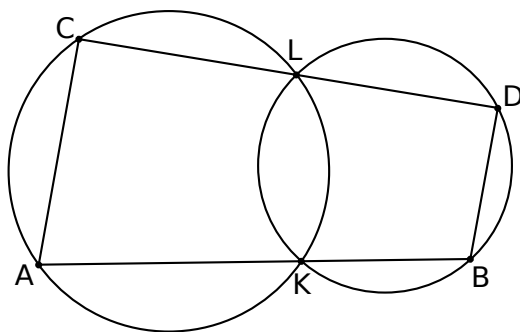
- a) Oblicz sumę 21 początkowych wyrazów tego ciągu.  
b) Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których spełniona jest nierówność

$$7a_n \leq 3 - (n - 1)^2.$$



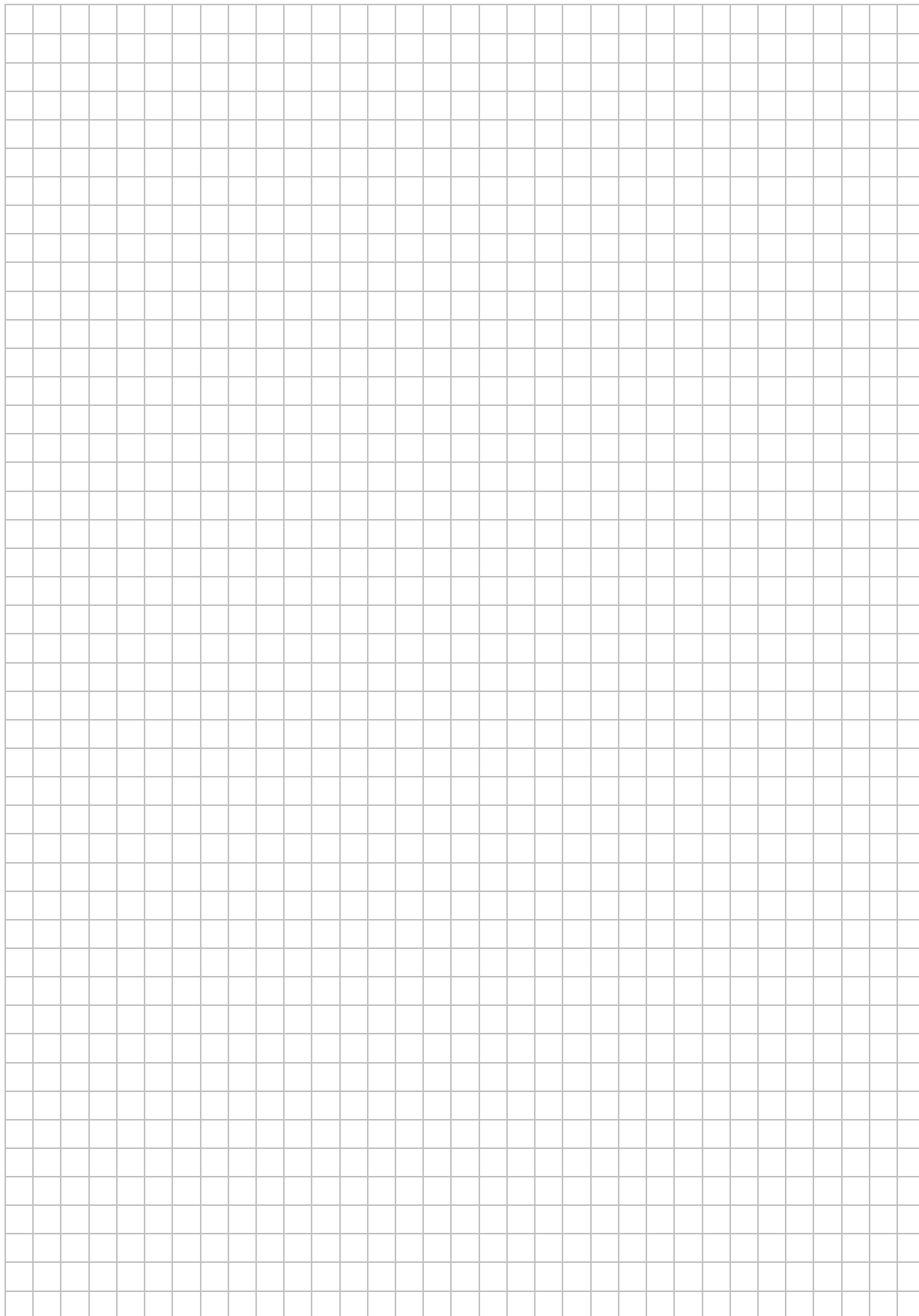
ZADANIE 3 (3 PKT.)

Dwa okręgi przecinają się w punktach  $K$  i  $L$ . Przez punkty  $K$  i  $L$  poprowadzono proste, które przecinają dane okręgi w punktach  $A, B, C, D$  tak, jak pokazano to na poniższym rysunku. Wykaż, że  $AC \parallel BD$ .



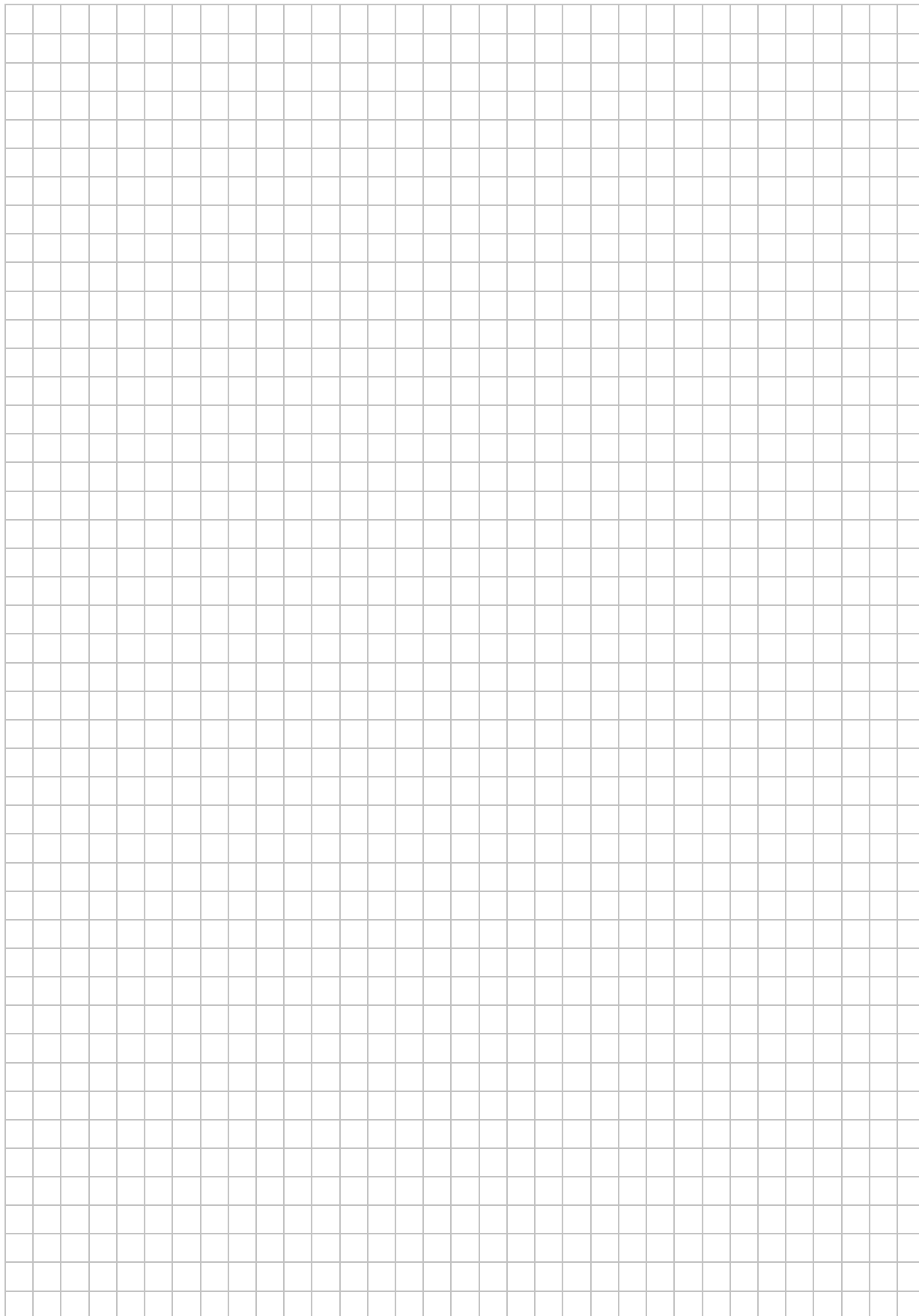
ZADANIE 4 (5 PKT.)

Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $P(x)$  przez trójmian  $x^2 - 3x - 28$  jeśli  $P(7) = 24$  i  $P(-4) = -31$ .



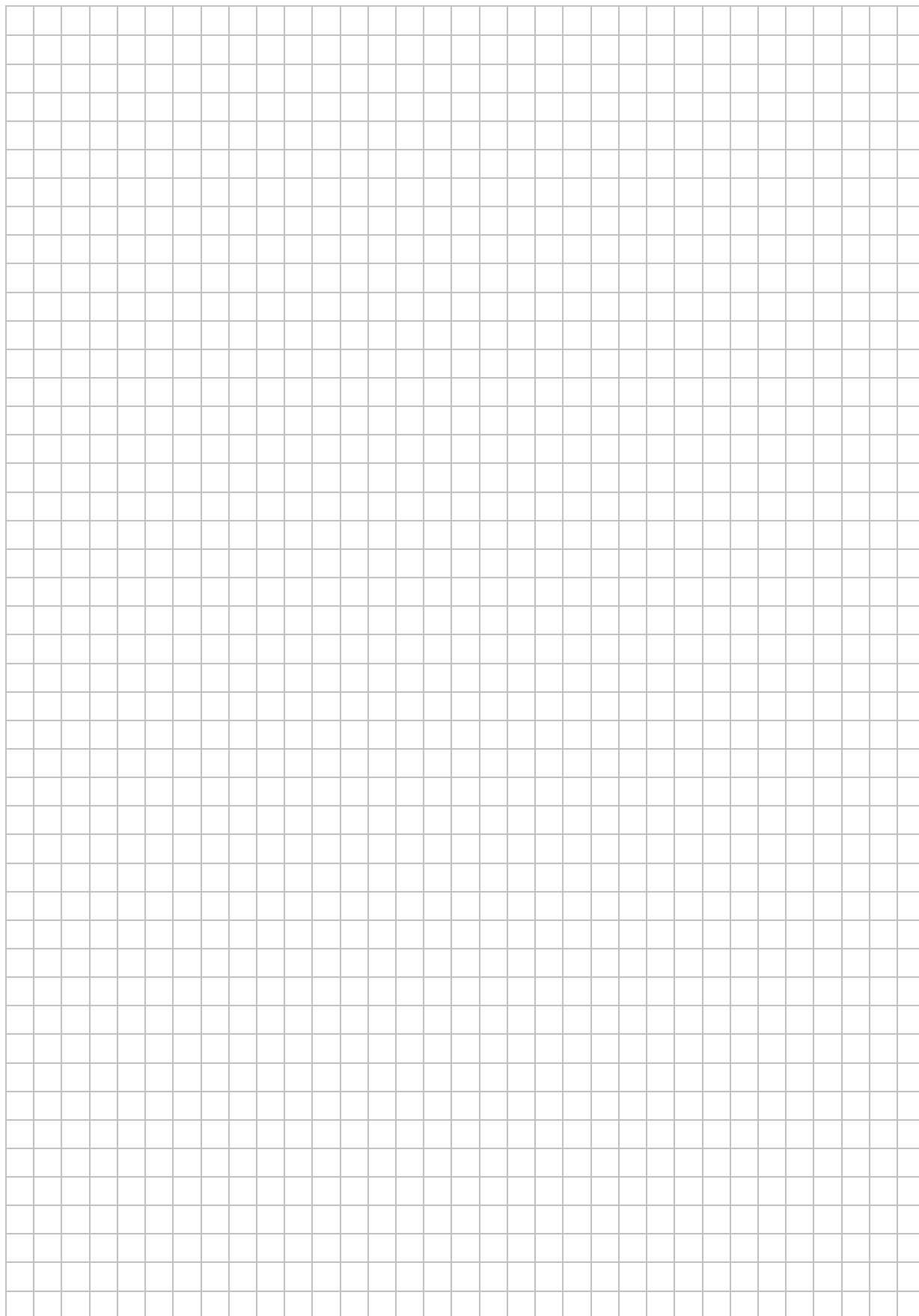
ZADANIE 5 (5 PKT.)

Prosta o równaniu  $x + 2y = 5$  zawiera przekątną  $BD$  rombu  $ABCD$ , którego bok ma długość 5. Wyznacz współrzędne wierzchołków rombu jeżeli  $A = (5, 1)$ .



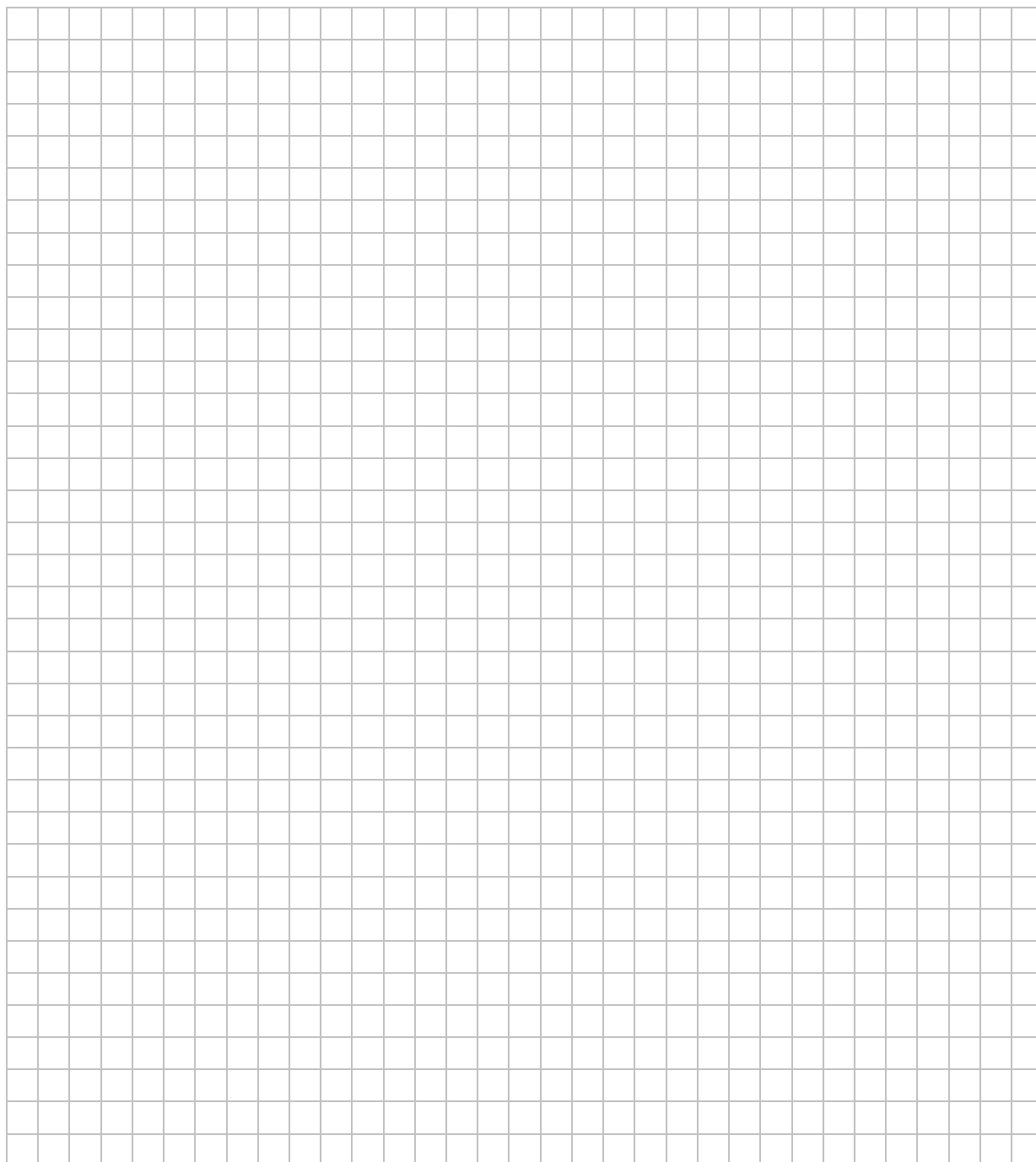
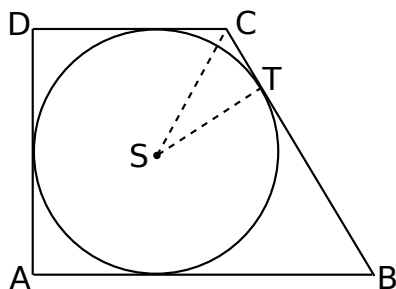
ZADANIE 6 (6 PKT.)

Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + (2m - 1)x - 6m + 3 = 0$  ma dwa różne pierwiastki  $x_1 < x_2$  spełniające nierówność  $x_1x_2 > x_2 - x_1$ .



ZADANIE 7 (6 PKT.)

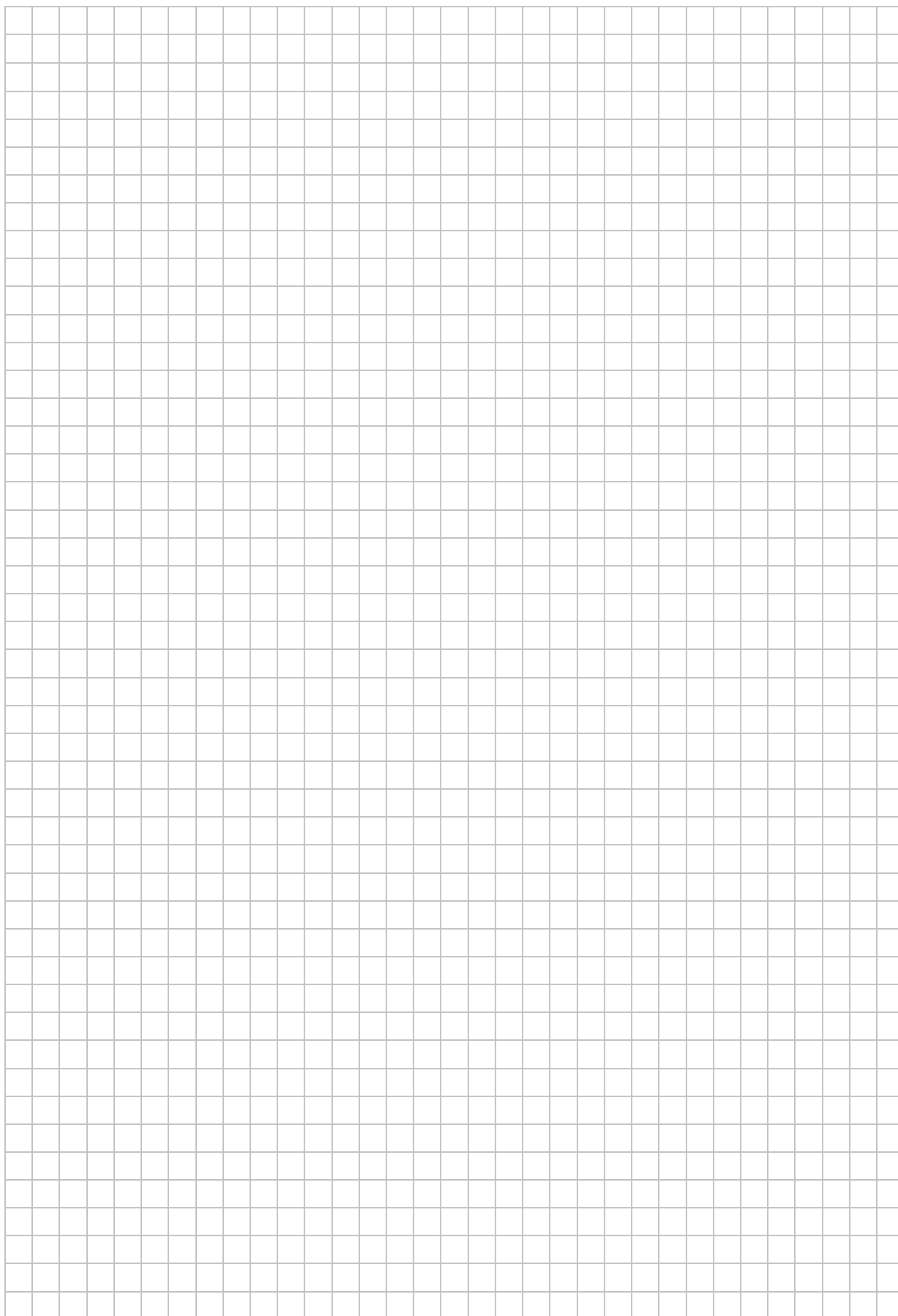
W trapez prostokątny  $ABCD$  wpisano okrąg, przy czym punkt  $S$  jest środkiem tego okręgu, a punkt  $T$  jest punktem styczności okręgu wpisanego z dłuższym ramieniem  $BC$ . Oblicz pole tego trapezu, jeśli  $|SC| = 10$  i  $|BT| = 8\sqrt{5}$ .





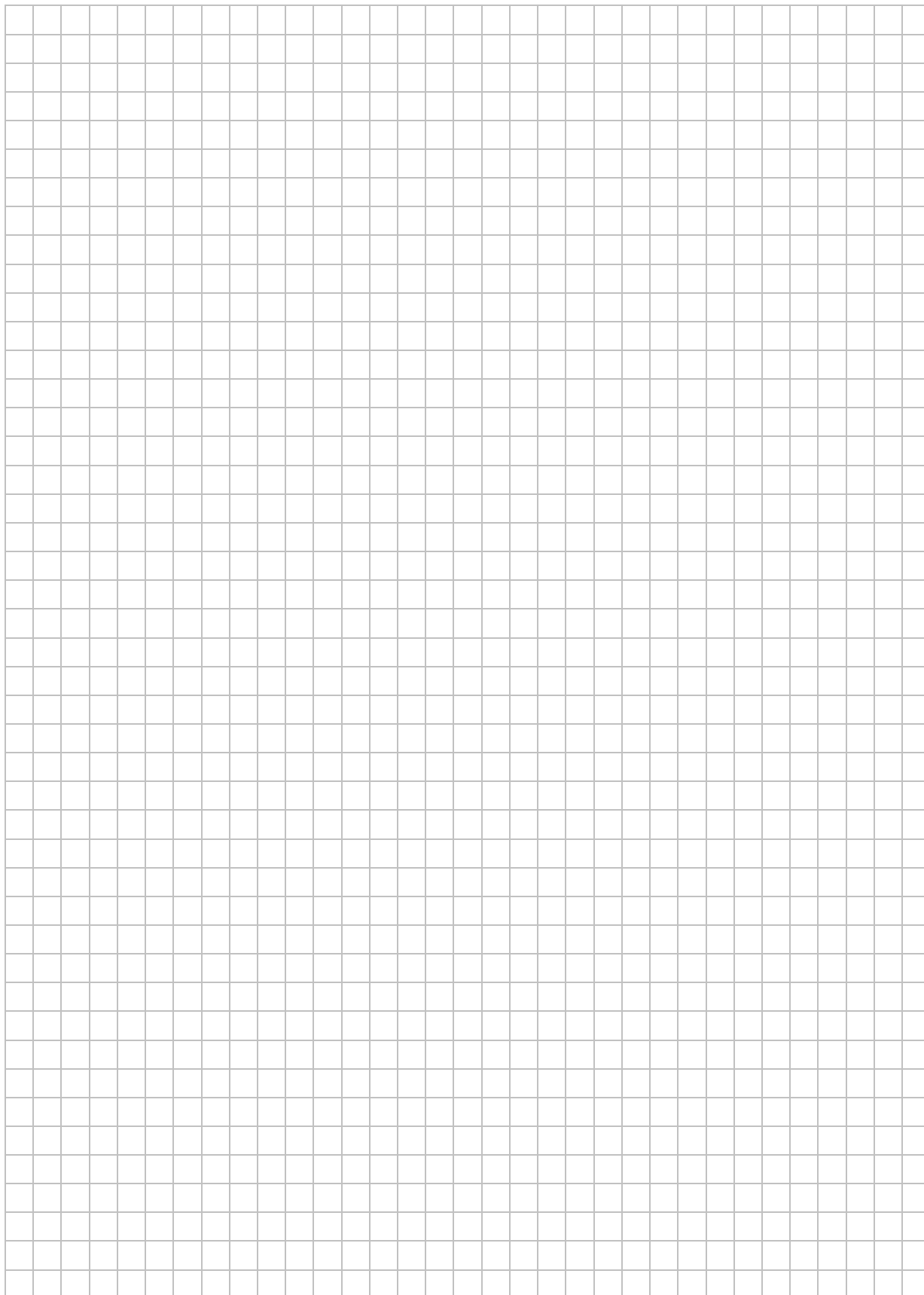
ZADANIE 8 (4 PKT.)

Dla jakich liczb naturalnych  $n$ , liczba  $n^2 + 12n + 17$  jest kwadratem liczby naturalnej?



ZADANIE 9 (6 PKT.)

Podstawą ostrosłupa  $ABCD$  jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $|AB| = 7$ ,  $|AD| = 5$  oraz  $\cos \angle DAB = \frac{4}{5}$ . Każda z krawędzi bocznych ostrosłupa ma długość  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ . Oblicz wysokość ostrosłupa.





ZADANIE 10 (6 PKT.)

Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których suma każdych trzech kolejnych cyfr jest równa 10?



