Matura próbna – matematyka poziom rozszerzony

Zadanie 1 (1pkt)

Jaki jest zbiór wartości funkcji $f(x) = \left|5\cos 2x - 1 - \sqrt{2}\right|$, jeśli $x \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \rangle$?

(a) $\langle 0, 6 + \sqrt{2} \rangle$ //gdy pominie przedział na x i policzy dla $x \in \mathbb{R}$

(b) $\langle 0, \frac{7}{2} + \sqrt{2} \rangle$ //prawidłowa odpowiedź

(c) $\langle 4 - \sqrt{2}, \frac{7}{2} + \sqrt{2} \rangle$ //gdy tylko obróci nierówności podczas modulowania

(d) $\langle -\frac{7}{2} - \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2} \rangle$ //gdy pominie moduł

Rozwiązanie:

$$\cos\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 0 = 1$$

Wiemy zatem, że funkcja $g(x) = \cos 2x$ rośnie na przedziale $\langle -\frac{\pi}{4}, 0 \rangle$ od 0 do 1 oraz maleje na przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$ od 1 do $-\frac{1}{2}$. Zatem z obserwacji wykresu oraz obliczonych wartości w punktach skrajnych dochodzimy do nierówności:

$$-\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1$$

$$-\frac{5}{2} \leq 5\cos 2x \leq 5$$

$$-\frac{7}{2} - \sqrt{2} \leq 5\cos 2x - 1 - \sqrt{2} \leq 4 - \sqrt{2}$$

$$\frac{7}{2} + \sqrt{2} \geq \left|5\cos 2x - 1 - \sqrt{2}\right| \geq 0$$

$$\frac{7}{2} + \sqrt{2} \geq f(x) \geq 0$$

Zadanie 2 (1pkt)

Niech $x^3 + ax^2 + b = 0$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Wynika stąd, że:

(a) Wielomian nie może mieć 3 różnych rozwiązań

(b) Suma wszystkich rozwiązań jest równa $(-b)$

(c) Iloczyn wszystkich rozwiązań jest równy 0

(d) Jeśli $a < 0$ to suma wszystkich rozwiązań jest dodatnia

Rozwiązanie:

// trudność tego zadania ma polegać na tym, że zdający, który zna wzory Vieta na trzecią potęgę poradzi sobie bardzo szybko, lecz ten kto tylko je kojarzy może pomylić dane równania, więc odpowiedzi są celowo sprecyzowane w powyższy sposób (pomieszanie wzorów), zaś osoba nieznająca ich musi najpierw potrudzić się o wyprowadzenie

Ze wzorów Vieta na trzecią potęgę mamy:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$
$$x_1 x_2 x_3 = -b$$
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0$$

(a) Nie, np. dla $a = 2, b = -1$ równanie ma trzy rozwiązania
(b) Nie, równa się $-a$
(c) Nie, równa się $-b$
(d) Tak, bo wtedy suma rozwiązań to $-a = |a|$

Zadanie 3 (1pkt)

Ile wynosi reszta z dzielenia $x = 35^{56} - 16^{16}$ przez 10?

(a) 1 //gdy weźmie cyfrę jedności x i nie podzieli przez 10
(b) 9 //prawidłowa odpowiedź
(c) 0 //dowolna zła odpowiedź
(d) 6 //dowolna zła odpowiedź

Rozwiązanie:

Zauważmy, że każda potęga liczby 35 ma cyfrę jedności równą 5, zaś każda potęga liczby 16 ma ostatnią cyfrę równą 6. Wobec tego cyfra jedności dla x to $|5 - 6| = 1$. Stąd po podzieleniu przez 10 otrzymamy resztę równą 9.

Zadanie 4 (1pkt)

Niech będą dane liczby: $a = 2^{700}$, $b = 5^{300}$, $c = 3^{500}$. Wtedy:

(a) $a > b > c$
(b) $a > c > b$
(c) $b > c > a$
(d) $c > a > b$ //prawidłowa odpowiedź

Rozwiązanie:

//zdający musi wykazać się umiejętnością porównywania liczb bez znania ich dokładnych wartości

$$\frac{2^{700}}{5^{300}} = \left(\frac{2^7}{5^3}\right)^{100} = \left(\frac{128}{125}\right)^{100} > 1$$

$$2^{700} > 5^{300}$$

$$\frac{5^{300}}{3^{500}} = \left(\frac{5^3}{3^5}\right)^{100} = \left(\frac{125}{243}\right)^{100} < 1$$

$$5^{300} < 3^{500}$$

$$\frac{2^{700}}{3^{500}} = \left(\frac{2^7}{3^5}\right)^{100} = \left(\frac{128}{243}\right)^{100} < 1$$

$$2^{700} < 3^{500}$$

Zatem: $c > a > b$

Zadanie 5 (1pkt)

Jaki jest okres podstawowy funkcji $f(x) = 1 - 2\sin \pi x$?

(a) 2π //gdy uzna, że okres jest równy okresowi $\sin x$

(b) π //gdy zgaduje, że nie może to być 2π, ale musi to zależeć od π

(c) 2 //prawidłowa odpowiedź

(d) 1 //aby poza poprawną odpowiedzią była jakaś inna niezależna od π

Rozwiązanie:

$$\big(\pi(x+T)\big) - (\pi x) = 2\pi$$

$$T = 2$$

Zadanie 6 (2pkt)

Niech $n \in N$. Wtedy $a = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\sqrt[6]{n^2-5} - \sqrt[6]{n^3+n^2}}{\sqrt[2]{n}}\right|$. Zakoduj kolejno cyfrę setek, dziesiątek i jedności a.

Rozwiązanie:

//zwyczajnie na maturze spotykamy raczej tylko pierwiastek drugiego i trzeciego stopnia, więc w tym zadaniu trzeba wykazać się umiejętnościami radzenia z trudniejszymi potęgami

$$\left|\frac{\sqrt[6]{n^2-5} - \sqrt[6]{n^3+n^2}}{\sqrt[2]{n}}\right| = \left|\frac{\sqrt[3]{n^2-5} - \sqrt[3]{n^3+n^2}}{\left(\sqrt[6]{n^2-5} + \sqrt[6]{n^3+n^2}\right)\sqrt[2]{n}}\right| =$$

$$= \left|\frac{n^2-5-n^3-n^2}{\left(\sqrt[6]{n^2-5}+\sqrt[6]{n^3+n^2}\right)\left(\sqrt[3]{(n^2-5)^2}+\sqrt[3]{(n^2-5)(n^3+n^2)}+\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}\right)\sqrt[2]{n}}\right| =$$

$$= \left|\frac{-\frac{5}{n^3}-\frac{n^3}{n^3}}{\left(\sqrt[6]{\frac{n^2}{n^3}-\frac{5}{n^3}}+\sqrt[6]{\frac{n^3}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{(n^2-5)^2}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{(n^2-5)(n^3+n^2)}{n^3 \qquad n^3}}+\sqrt[3]{\frac{(n^3+n^2)^2}{n^6}}\right)\sqrt[2]{\frac{n}{n}}}\right| =$$

$$= \left|\frac{-\frac{5}{n^3}-1}{\left(\sqrt[6]{\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3}}+\sqrt[6]{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt[3]{(\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3})^2}+\sqrt[3]{(\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3})(1+\frac{1}{n})}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right)\cdot 1}\right|$$

Teraz z łatwością możemy policzyć, że:

$$a = \left|\frac{-0-1}{\left(\sqrt[6]{0-0}+\sqrt[6]{1+0}\right)\left(\sqrt[3]{(0-0)^2}+\sqrt[3]{(0-0)(1+0)}+\sqrt[3]{(1+0)^2}\right)\cdot 1}\right| = 1$$

Wobec tego musimy zakodować cyfry: 001.

Zadanie 7 (3pkt)

Udowodnij, że dla dowolnych a, b, c, d zachodzi nierówność:

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2 \geq a(b+c)+b(c+d)+cd$$

Rozwiązanie:

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2 \geq a(b+c)+b(c+d)+cd$$

$$a^2+ab+2b^2+bc+2c^2+cd+d^2-ac-bd \geq 0$$

$$\frac{1}{2}(a-c)^2+\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2+\frac{1}{2}(b+c)^2+\frac{1}{2}(c+d)^2+\frac{1}{2}(b-d)^2+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{4}a^2 \geq 0$$

Na podstawie równoważnego przekształcenia tezy doszliśmy do nierówności, o której wiemy, że zawsze jest prawdziwa, zatem teza także jest prawdziwa.

c.n.d.

Zadanie 8 (3pkt)

Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{\sin 15° \sin 75° \sin 20° \sin 70° \sin 25° \sin 65°}{\sin 100°}$

Rozwiązanie:

//wyrażenie jest iloczynem funkcji trygonometrycznych, których wartości dokładnie nie znamy, więc zdający musi odpowiednio przekształcać wyrażenie, by dojść do postaci, którą jest w stanie policzyć

$$\frac{\sin 15° \sin 75° \sin 20° \sin 70° \sin 25° \sin 65°}{\sin 100°} =$$

$$\frac{\sin 15° \cos 15° \sin 20° \cos 20° \sin 25° \cos 25°}{\sin 100°} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sin 30°\cdot\frac{1}{2}\sin 40°\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 50°}{\sin 100°} =$$

$$\frac{\frac{1}{16}\cos 50° \sin 50°}{\sin 100°} = \frac{1}{32}$$

Zadanie 9 (3pkt)

Dany jest czworokąt $ABCD$. Kąt ABC w tym wielokącie jest równy $90°$. Przyprostokątne trójkąta ABC mają długości $BC = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ i $AB = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie E. Wiedząc, że $\sphericalangle EBC = 20°$, oblicz kąt ostry, pod którym przecinają się przekątne tego czworokąta.

Rozwiązanie:

//trudność tego zadania ma polegać na tym, że po obliczeniu $\operatorname{tg}\sphericalangle ACB$ mamy $2-\sqrt{3}$, co nie nasuwa na myśl żadnego z kątów i musimy podjąć inne obliczenia

Z podanych informacji mamy:

$$\operatorname{tg}\sphericalangle \mathrm{ACB} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°}{\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°} = \frac{\sin(45° - 30°)}{\cos(45° - 30°)}$$

$$= \operatorname{tg}(45° - 30°) = \operatorname{tg}(15°)$$

Wobec tego mamy: $\sphericalangle ACB = 15°$. Stąd zaś wiemy, że $\sphericalangle BEC = 180° - 20° - 15° = 145°$. Zatem szukany kąt to: $180° - 145° = 35°$.

Zadanie 10 (4pkt)

Ile jest liczb naturalnych, mniejszych od 10000, podzielnych przez 9, w których zapisie występują wyłącznie cyfry 0,1,2,3,4,5 oraz cyfry nie powtarzają się w zapisie danej liczby?

Rozwiązanie:

1. Jednocyfrowe: 0 → 1
2. Dwucyfrowe: 45,54 → 2
3. Trzycyfrowe:

   Na pierwszym miejscu może stać 1/2/3/4/5. Następnie wypisujemy możliwości na II miejsce i dobieramy do niego trzecie, tak by suma cyfr tworzących liczbę była podzielna przez 9. Nie zapominamy przy tym, że cyfry nie mogą się powtarzać:

1	_	_	2	_	_	3	_	_	4	_	_	5	_	_
	0	X		0	X		0	X		0	5		0	4
	2	X		1	X		1	5		1	X		1	3
	3	5		3	4		2	4		2	3		2	X
	4	X		4	3		4	2		3	2		3	1
	5	3		5	X		5	1		5	0		4	0

   Zatem trzycyfrowe: → 16

4. Czterocyfrowe:

   Na pierwszym miejscu może stać 1/2/3/4/5. Następnie wypisujemy możliwości na II miejsce i dobieramy do niego cyfry, które mogą pojawić się na miejscu III i IV, tak by suma cyfr tworzących liczbę była podzielna przez 9. Nie zapominamy przy tym, że cyfry nie mogą się powtarzać:

1	_	_ _	2	_	_ _	3	_	_ _	4	_	_ _	5	_	_ _
	0	3,5		0	3,4		0	1,5 2,4		0	2,3		0	1,3
	2	X		1	X		1	5,0		1	X		1	0,3
	3	0,5		3	0,4		2	0,4		2	0,3		2	X
	4	X		4	0,3		4	0,2		3	0,2		3	0,1
	5	0,3		5	X		5	0,1		5	X		4	X

   Zatem czterocyfrowe: → $18 \cdot 2 = 36$ (bo cyfry wybrane na miejsce III i IV możemy ustawić na dwa sposoby)

   Odpowiedź: takich liczb jest 55.

Zadanie 11 (4pkt)

Dane są wyrażenia:

$a_1 = \log_3 x,\ \ a_2 = \frac{1}{2\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 18} + \frac{1}{18\cdot 26} + \frac{1}{26\cdot 34} + \frac{1}{34\cdot 42} + \frac{1}{42\cdot 50},\ a_3 = \log_3 m.$

Dla jakich wartości parametru x wyrażenia te spełniają następujące warunki:

- a_1, a_2, a_3 to kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego
- x, m, a_2 to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego
- $x, m \in \mathbb{R},\ x \neq 0, m \neq 0$

Rozwiązanie:

Zajmijmy się najpierw obliczeniem dokładnej wartości a_2. Kolejne ułamki, które je tworzą są postaci $\frac{1}{n(n+8)}$. Zauważmy, że: $\frac{1}{n(n+8)} = \frac{x}{n} + \frac{y}{n+8} = \frac{n(x+y)+8x}{n(n+8)}$. Mamy zatem: $x + y = 0,\ 8x = 1$. Stąd $x = \frac{1}{8},\ y = -\frac{1}{8}$, przez co otrzymujemy: $\frac{1}{n(n+8)} = \frac{1}{8n} + \frac{1}{8(n+8)}$. Wobec tego:

$$a_2 = \frac{1}{8\cdot 2} - \frac{1}{8\cdot 10} + \frac{1}{8\cdot 10} - \frac{1}{8\cdot 18} + \cdots + \frac{1}{8\cdot 42} - \frac{1}{8\cdot 50} = \frac{1}{8\cdot 2} - \frac{1}{8\cdot 50} = \frac{24}{400} = 0{,}06$$

Z warunków zadania otrzymujemy:

$$m = xa_2 = 0{,}06x$$

$$\log_3 x + \log_3 m = 2a_2$$

$$\log_3(xm) = 2a_2$$

$$\log_3(0{,}06x^2) = 0{,}12$$

$$0{,}06x^2 = 3^{0{,}12}$$

$$x^2 = \frac{3^{0{,}12}}{0{,}06}$$

$$x = \sqrt{\frac{3^{0{,}12}}{0{,}06}} \text{ lub } x = -\sqrt{\frac{3^{0{,}12}}{0{,}06}}$$

Zadanie 12 (4pkt)

Dla jakich wartości parametru x zachodzi $f(x) > 0$, jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{4},\ \ x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{tg} x,\ \ x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \end{cases} ?$$

Rozwiązanie:

$$1° \quad \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{4} = (\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2})\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$$

$\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0$ gdy zachodzi jeden z przypadków:

$$1.1° \quad \begin{cases} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \\ \cos x - \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \\ x \in \left(\frac{-\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$

$$1.2° \quad \begin{cases} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \\ \cos x - \frac{1}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right) \\ x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$

Teraz musimy to połączyć z warunkiem: $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$.

Otrzymujemy: $x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup \ (\pi + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi)$

$$2° \ \operatorname{tg} x > 0$$

Zatem $x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, co łączymy jeszcze z warunkiem $x \in (\frac{\pi}{3} + k\pi, 2k\pi)$ i otrzymujemy $x \in (\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

Wobec tego ostateczna odpowiedź to:

$x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup \ (\pi + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

Uwaga: przedziały te możemy jeszcze uprościć do ładniejszej postaci, lecz taka postać nam wystarczy

Zadanie 13 (4pkt)

Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ podane równanie jest sprzeczne?

$$x^4 + 3m + 4mx^2 + 4m^2 + 3 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x^4 + 3m + 4mx^2 + 4m^2 + 3 = 0$$
$$x^4 + 4mx^2 + 3m + 4m^2 + 3 = 0$$
$$t = x^2, t \geq 0, t^2 + 4mt + 3m + 4m^2 + m = 0$$

$$\Delta = 16m^2 - 12m - 16m^2 - 4m = -16m$$

Rozważymy teraz 3 sytuacje, gdy podane równanie może być sprzeczne:

$$1^\circ\ \Delta < 0$$
$$-16m < 0$$
$$m > 0$$

$$2^\circ \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 < 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} m < 0 \\ -4m < 0 \\ 3m + 4m^2 + m > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < 0 \\ m > 0 \\ 3m + 4m^2 + m > 0 \end{cases}$$
$$m \in \emptyset$$

$$3^\circ \begin{cases} \Delta = 0 \\ t_0 < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} m = 0 \\ -\dfrac{4m}{2} < 0 \end{cases}$$
$$m \in \emptyset$$

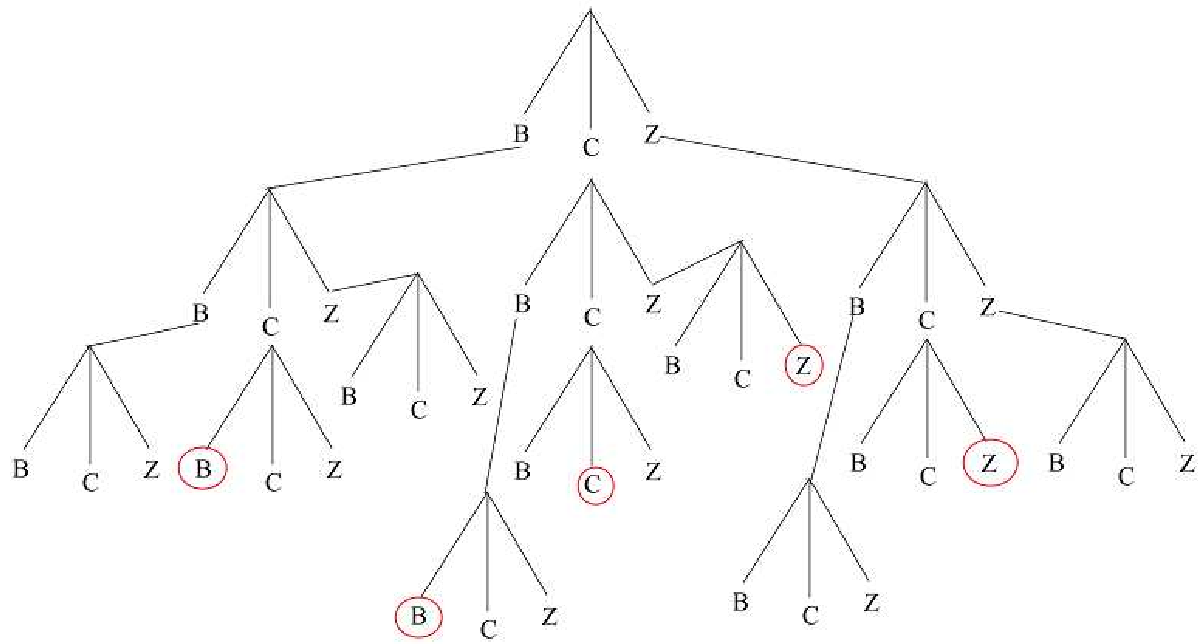
Zatem ostatecznie: $m > 0$

Zadanie 14 (5pkt)

W I urnie znajdują się 2 kule białe, 3 czarne i 1 zielona. W II urnie jest 1 kula biała, 2 czarne, 2 zielone. Na początku przekładamy jedną kulę z urny I do II, następnie jeszcze jedną kulę z I do II, po czym zabieramy jedną kulę z II do I. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po tych operacjach w I urnie zostaną 2 kule białe, 2 czarne i 1 zielona.

Rozwiązanie:

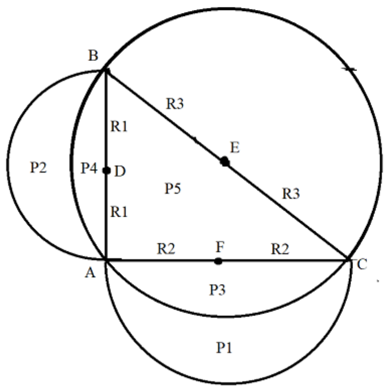
Aby zaszła podana sytuacja musimy ostatecznie mieć wyrzuconą jedną kulę czarną. Narysujmy drzewo tego zdarzenia:



Pierwsze „rozejście” na B/C/Z symbolizuje zabranie I kuli, drugie rozejście zabranie II kuli i trzecie to przełożenie kuli z II urny do I. Gałęzie zaznaczone pętelką to te, które spełniają nasz warunek. Po zastanowieniu się jakie prawdopodobieństwa pociągają za sobą poszczególne gałęzie otrzymujemy prawdopodobieństwo zdarzenia równe:

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{66}{210}=\frac{11}{35}$$

Zadanie 15 (6pkt)



W układzie współrzędnych dana jest figura zamieszczona na rysunku. Wiedząc, że trójkąt ABC jest prostokątny, $P1,\dots,P5$ to pola odpowiednich figur, $R1, R2, R3$ - promienie poszczególnych okręgów, $D=(3,4)$, bok AC leży na prostej $y_2=3x+5$, $P1+P2=10$ oblicz $R1, R2, R3, P5$.

Rozwiązanie:

AB przecina się z AC pod kątem prostym, więc:

$$AB: y_1 = -\frac{1}{3}x + b_1$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 3 + b_1 = 4$$

$$AB: y_1 = -\frac{1}{3}x + 5$$

$$A: -\frac{1}{3}a + 5 = 3a + 5 \Rightarrow a = 0, y_a = 5 \Rightarrow A = (0,5)$$

$$R1 = \sqrt{(3-0)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} P2 + P4 = \frac{(R1)^2\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10}\right)^2\pi = 5\pi \\ P1 + P2 = 10 \\ P1 + P3 = \frac{(R2)^2\pi}{2} \\ P3 + P4 + P5 = \frac{(R3)^2\pi}{2} \end{cases}$$

$$P3 + P4 = \frac{(R2)^2\pi}{2} + \frac{(R1)^2\pi}{2} - (P1 + P2)$$

$$P5 = \frac{(R3)^2\pi}{2} - (P3 + P4) = \frac{(R3)^2\pi}{2} - \left(\frac{(R2)^2\pi}{2} + \frac{(R1)^2\pi}{2} - (P1 + P2)\right) =$$

$$= \frac{(R3)^2\pi}{2} - \left(\frac{(R3)^2\pi}{2} - (P1 + P2)\right) = P1 + P2 = 10$$

$$10 = \frac{2\sqrt{10}2(R2)}{2} \Rightarrow R2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$R3 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Zadanie 16 (7pkt)

Dany jest graniastosłup prosty o wysokości H = 42. Graniastosłup ten ma w podstawie trapez prostokątny taki, że suma dłuższej podstawy a i jego wysokości h jest równa $(\log 10\sqrt[5]{2} - \log\frac{\sqrt[5]{2}}{10^5})$, zaś ramię trapezu jest równe 2h. Dla jakich wartości parametru a graniastosłup ma największą objętość?

Rozwiązanie:

$$a + h = (\log 10\sqrt[5]{2} - \log\frac{\sqrt[5]{2}}{10^5}) = \log(10^6) = 6$$

$h = 6 - a$ więc $a < 6$

Niech b - długość krótszej podstawy:

$$(a-b)^2 + h^2 = (2h)^2$$

$$(a-b)^2 = 3h^2$$

$$b = a - \sqrt{3}h \text{ lub } b = a + \sqrt{3}h$$

Odpowiedź $b = a + \sqrt{3}h$ odrzucamy, bo $b < a$, czyli mamy:

$$b = a - \sqrt{3}h = a\left(1+\sqrt{3}\right) - 6\sqrt{3}$$

$$b > 0 \text{ więc } a\left(1+\sqrt{3}\right) > 6\sqrt{3} \Rightarrow a > 6 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{Zatem: } a \in (9 - 3\sqrt{3}, 6)$$

$$V(a) = \frac{a+b}{2} \cdot h \cdot H = \frac{a + \ a\left(\sqrt{3}+1\right) - 6\sqrt{3}}{2} \cdot (6-a) \cdot 42 =$$

$$= 21(a^2\left(-2-\sqrt{3}\right) + a\left(12\sqrt{3}+12\right) - 36\sqrt{3})$$

$V(a)$ jest funkcją kwadratową o ujemnym współczynniku przy a^2, zatem największą wartość przyjmuje w wierzchołku:

$$a_w = \frac{\left(12\sqrt{3}+12\right)}{2(2+\sqrt{3})} = 6(\sqrt{3}-1)$$

a_w należy do dziedziny, więc znaleźliśmy poszukiwane a.