Zadanie (nr 4272119)

Wykres funkcji $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6}$ przesunięto o wektor $\vec{u} = [-2;1]$, a następnie przesunięty wykres odbito symetrycznie względem początku układu współrzędnych. Otrzymano wykres pewnej funkcji g. Znajdź wzór funkcji g i wyznacz jej dziedzinę.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na przesunięcie funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [a,b]$:

$$y = f(x-a) + b.$$

Sposób I

W naszej sytuacji, po przesunięciu, otrzymamy funkcję

$$g(x) = f(x+2) + 1 = \frac{(x+2)-3}{(x+2)^2-(x+2)-6} + 1 = \frac{x-1}{x^2+3x-4} + 1.$$

Odbicie wykresu względem początku układu, to to samo co wykonanie dwóch odbić: najpierw względem osi Oy, potem względem Ox. Przekształceniu temu odpowiada zmiana wzoru:

$$h(x) = -g(-x) = -\frac{-x-1}{x^2-3x-4} - 1 = \frac{x+1}{x^2-3x-4} - 1.$$

Aby wyznaczyć dziedzinę tej funkcji, musimy sprawdzić, dla jakich x-ów mianownik się zeruje.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$\Delta = 9 + 16 = 25$$
$$x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$$
$$x_2 = \frac{3+5}{2} = 4.$$

Zatem dziedzina to zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-1,4\}$.

Sposób II

Znajdźmy pierwiastki mianownika danego wzoru funkcji.

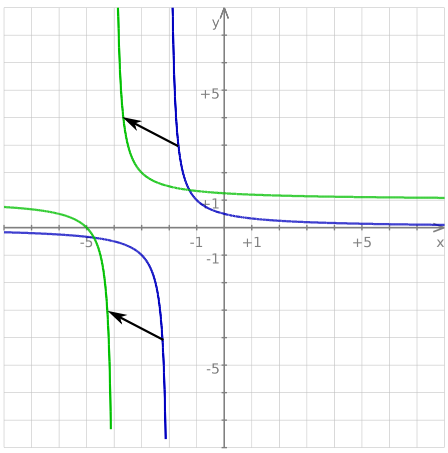
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$\Delta = 1 + 24 = 25$$
$$x = \frac{1-5}{2} = -2 \quad \vee \quad x = \frac{1+5}{2} = 3.$$

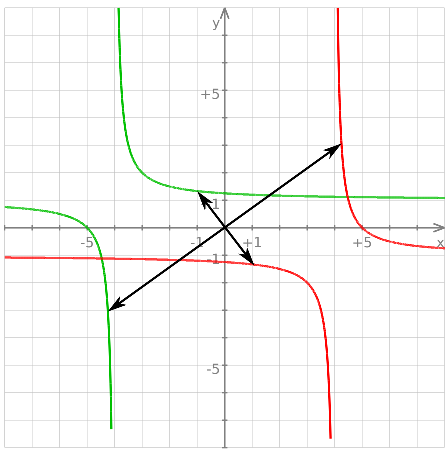
Zatem
$$\frac{x-3}{x^2-x-6} = \frac{x-3}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x+2}.$$
Musimy być jednak ostrożni i pamiętać, że dziedziną powyższej funkcji jest $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

Po przesunięciu o wektor $[-2; 1]$ otrzymamy funkcję
$$y = \frac{1}{x+2+2} + 1 = \frac{1}{x+4} + 1.$$
Ponieważ przesunęliśmy wykres w lewo o dwie jednostki, dziedziną tej funkcji będzie zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$.

Podobnie jak poprzednio zauważamy, że odbiciu względem początku układu współrzędnych odpowiada zmiana wzoru funkcji postaci $y = -f(-x)$, czyli otrzymamy funkcję
$$y = -\left(\frac{1}{-x+4} + 1\right) = \frac{1}{x-4} - 1.$$
Dziedziną będzie zbiór $\mathbb{R} \setminus \{4, -1\}$.

Na zakończenie, dla ciekawskich, wszystkie trzy wykresy.





Odpowiedź: $\frac{x+1}{x^2-3x-4} - 1 = \frac{1}{x-4} - 1$, **Dziedzina:** $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$