# EGZAMIN WSTĘPNY CZERWIEC 2014

## MATEMATYKA

Poziom podstawowy

# Kryteria oceniania odpowiedzi

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

# Klucz punktowania zadań zamkniętych

| zadanie | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| odpowiedź | D | C | C | A | D | A | A | B | C | C | A | B | C |

| zadanie | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| odpowiedź | C | C | C | B | B | B | A | D | C | B | D | B |

# Schemat oceniania zadań otwartych

## Zadanie 26. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $(2x-3)(3-x)\geq 0$.

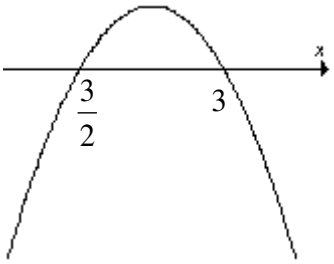
**Rozwiązanie**

Wyznaczamy miejsca zerowe wielomianu, występującego po lewej stronie nierówności:

$$(2x-3)=0 \text{ lub } (3-x)=0$$

$$x_1=\frac{3}{2}, x_2=3$$

Szkicujemy parabolę, opisaną przez lewą stronę nierówności.




Odczytujemy z ilustracji zbiór rozwiązań nierówności: $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$.

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**
gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=\frac{3}{2}, x_2=3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
  np. $x_1=\frac{2}{3}, x_2=3, x\in\left\langle\frac{2}{3},3\right\rangle$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**
gdy poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:

- $\left\langle \frac{3}{2}, 3 \right\rangle$

albo

- $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$

albo

- $x \geq \frac{3}{2}, x \leq 3$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

## Zadanie 27. *(2 pkt)*

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a$ i każdej liczby rzeczywistej $b$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}.$$

**Rozwiązanie**

Aby wykazać prawdziwość podanej nierówności, przekształcimy ją najpierw do prostszej postaci równoważnej. Rozpoczynamy od podanej nierówności:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez 4:

$$(a+b)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right).$$

Redukujemy wyrazy podobne:

$$2ab \le a^2+b^2.$$

Stąd otrzymujemy: $a^2+b^2-2ab \ge 0$, czyli $(a-b)^2 \ge 0$. Nierówność ta jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $a$ i każdej liczby rzeczywistej $b$, zatem prawdziwa jest też nierówność równoważna $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$, co należało wykazać.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy przekształci podaną nierówność do postaci $2a^2+2b^2 \ge 4ab$ lub $a^2+b^2-2ab \ge 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy przedstawi kompletny dowód podanej nierówności.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

## Zadanie 28. *(2 pkt)*

Kąt $\alpha$ jest ostry oraz $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Przekształcamy wyrażenie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\left(1+\sin\alpha\right)+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\left(1+\sin\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha\left(1+\sin\alpha\right)}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Następnie podstawiamy $\frac{\sqrt{3}}{3}$ za $\cos\alpha$ i otrzymujemy, że $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy przekształci wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ i otrzyma w wyniku : $\frac{1}{\cos\alpha}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}:\frac{3}{\sqrt{3}}$ lub $\sqrt{3}$.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Obliczamy $\sin\alpha$, wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Następnie obliczamy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}+1}{\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy obliczy $\sin\alpha$ wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego: $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}:\frac{3}{\sqrt{3}}$ lub $\sqrt{3}$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

## Zadanie 29. *(2 pkt)*

Liczby $6,\ 2x+4,\ x+26$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę $r$ tego ciągu.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Ciąg $(6, 2x+4, x+26)$ jest arytmetyczny, więc wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich. Stąd: $2x+4=\frac{6+x+26}{2}$.

Rozwiązaniem równania jest $x=8$.

Różnica $r$ ciągu $(6, 2x+4, x+26)$ jest równa: $r=2\cdot 8+4-6=14$.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze równanie: $2x+4=\frac{6+x+26}{2}$ lub $2(2x+4)=32+x$, lub $2x+4-6=x+26-2x-4$ (różnica sąsiednich wyrazów ciągu jest stała).

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy różnicę $r$ ciągu $(6, 2x+4, x+26)$: $r=14$.

Uwaga

Jeśli zdający pomyli własność ciągu arytmetycznego z własnością ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Ciąg $(6, 2x+4, x+26)$ jest arytmetyczny, zatem $2x+4=6+r$ oraz $x+26=6+2r$, gdzie $r$ oznacza różnicę ciągu arytmetycznego.

Rozwiązując układ równań $\begin{cases}2x+4=6+r\\x+26=6+2r\end{cases}$ otrzymujemy: $x=8$, $r=14$.

Odp. Różnica $r$ tego ciągu jest równa 14.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze układ równań: $\begin{cases}2x+4=6+r\\x+26=6+2r\end{cases}$.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy różnicę $r$ ciągu $(6, 2x+4, x+26)$: $r=14$.

Uwaga

Jeśli zdający pomyli własność ciągu arytmetycznego z własnością ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

## Zadanie 30. *(2 pkt)*

Dane są dwa podzbiory zbioru liczb całkowitych:

$$K=\{-4,\ -1,\ 1,\ 5,\ 6\} \text{ i } L=\{-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

**Rozwiązanie (I sposób)** (*klasyczna definicja prawdopodobieństwa*)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane $(x, y)$ dwóch liczb, ze zbiorów $K=\{-4,\ -1,\ 1,\ 5,\ 6\}$ i $L=\{-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Niech $\Omega$ oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a $A$ – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa: $|\Omega|=5\cdot 5=25$.

Iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni, gdy:

- obie wylosowane liczby są dodatnie

albo

- obie wylosowane liczby są ujemne.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$ jest więc równa

$|A|=3\cdot 3+2\cdot 2=13$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$: $P(A)=\frac{13}{25}$.

**Rozwiązanie (II sposób)** (*metoda tabeli*)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane $(x, y)$ dwóch liczb, ze zbiorów $K=\{-4,\ -1,\ 1,\ 5,\ 6\}$ i $L=\{-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Niech $\Omega$ oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a $A$ – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

| | **–4** | **–1** | **1** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|
| **–3** | ☺ | ☺ | | | |
| **–2** | ☺ | ☺ | | | |
| **2** | | | ☺ | ☺ | ☺ |
| **3** | | | ☺ | ☺ | ☺ |
| **4** | | | ☺ | ☺ | ☺ |

Symbol ☺ w tabeli oznacza zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A

$|\Omega|=5\cdot 5=25$ i $|A|=13$, zatem $|A|=13$.

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=5\cdot 5=25$

albo

- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$: $|A|=13$

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

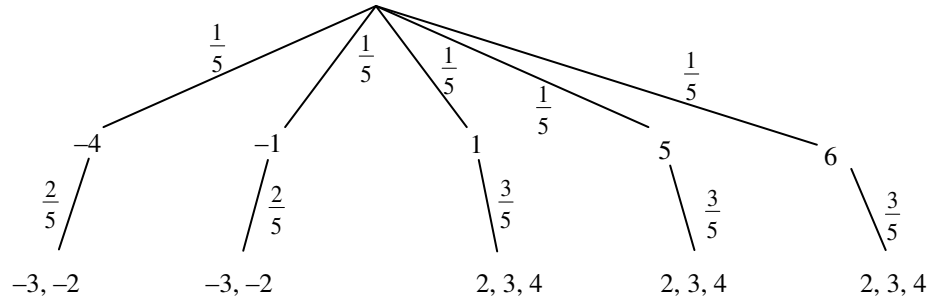
**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$: $P(A)=\frac{13}{25}$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający popełnił błąd przy zliczaniu par w tabeli, spełniających warunki zadania, i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 pkt**.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów.**

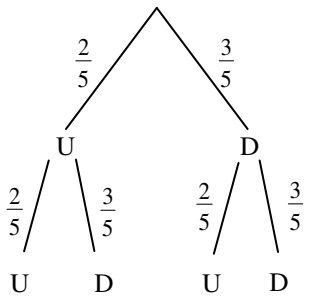
**Rozwiązanie (III sposób)** (*metoda drzewa*)

Rysujemy drzewo:

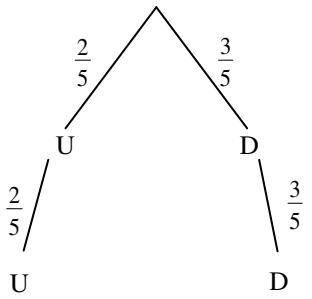



Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ (iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni) jest więc równe:
$P(A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{25}$.

**albo**




**albo**




U – oznacza wylosowanie liczby ujemnej
D – oznacza wylosowanie liczby dodatniej

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ (iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni) jest więc równe:
$P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{25}$.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy:

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

- narysuje pełne drzewo i przynajmniej na jednej gałęzi opisze prawdopodobieństwo

albo

- narysuje drzewo tylko z istotnymi gałęziami i przynajmniej na jednej gałęzi opisze prawdopodobieństwo.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$: $P(A)=\frac{13}{25}$.

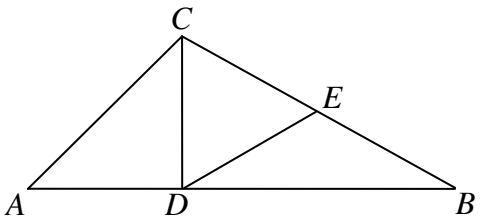
Uwaga

Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów.**

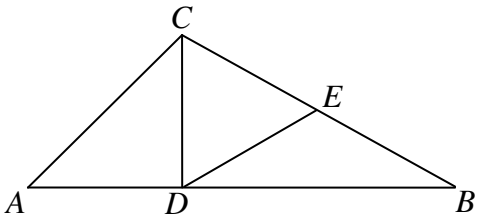
Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

## Zadanie 31. *(2 pkt)*

Dany jest trójkąt *ABC*. Odcinek *CD* jest wysokością tego trójkąta, punkt *E* jest środkiem boku *BC* (tak jak na rysunku) i $|CD| = |DE|$. Udowodnij, że trójkąt *CDE* jest równoboczny.




**Rozwiązanie (I sposób)**




Trójkąt *CDB* jest prostokątny, a punkt *E* jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta, czyli punkt *E* jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie *CDB*. Stąd wynika, że $|DE| = |BE| = |CE|$. Z treści zadania wiemy, że $|CD| = |DE|$, zatem trójkąt *CDE* jest równoboczny. Co należało udowodnić.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

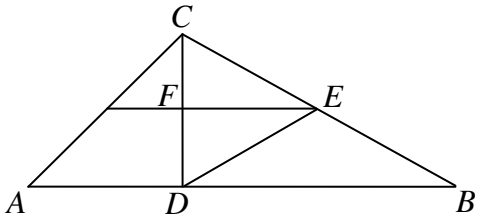
gdy stwierdzi, że punkt *E* jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie *CDB* i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że trójkąt *CDE* jest równoboczny.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Rysujemy prostą równoległą do podstawy *AB* przechodzącą przez punkt *E*. Otrzymujemy trójkąt *CFE*, który jest podobny do trójkąta *CDB* w skali $k = \frac{1}{2}$.




Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Odcinek *EF* jest wysokością trójkąta *CDE,* która dzieli podstawę *CD* na dwie równe części. Stąd trójkąt *CDE* jest równoramienny i $|DE|=|CE|$. Z treści zadania wiemy, że $|CD|=|DE|$, zatem trójkąt *CDE* jest równoboczny, co należało udowodnić.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy narysuje prostą równoległą do podstawy *AB* i zauważy, że trójkąty *CFE* i *CDB* są podobne w skali $k=\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

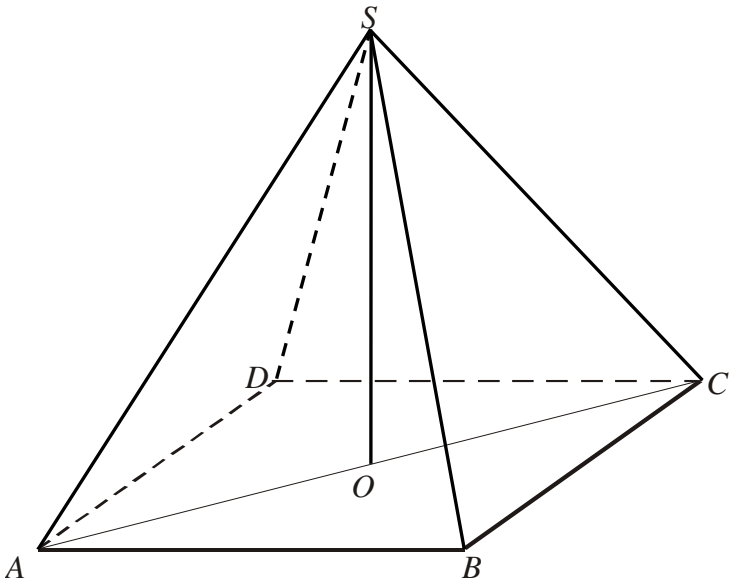
**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że trójkąt *CDE* jest równoboczny.

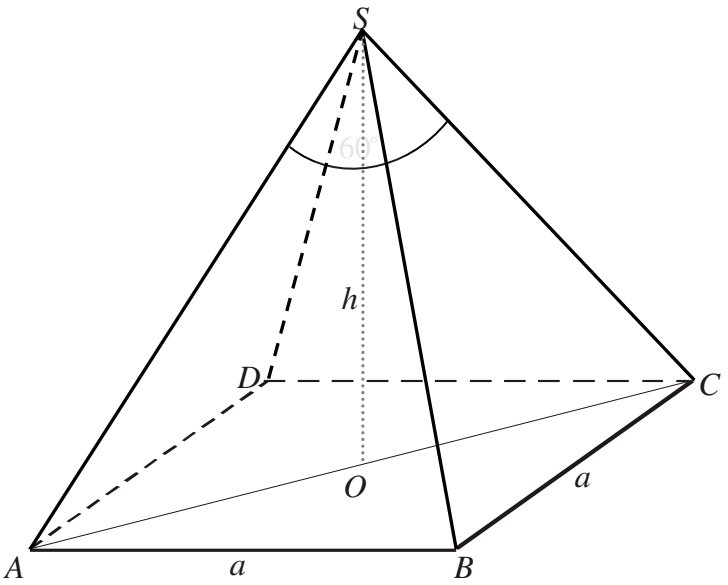
Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

## Zadanie 32. *(4 pkt)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* (zobacz rysunek) przekątna *AC* podstawy ma długość $4\sqrt{2}$. Kąt *ASC* między przeciwległymi krawędziami bocznymi ostrosłupa jest równy $60^\circ$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.




**Rozwiązanie**




Niech *a* oznacza krawędź podstawy ostrosłupa, wtedy $a\sqrt{2}=4\sqrt{2}$. Stąd $a=4$.
Obliczamy pole *P* podstawy ostrosłupa: $P=a^2=16$.

W trójkącie *AOS* kąt *ASO* jest równy $30^\circ$, a $|AO|=\frac{1}{2}|AC|=2\sqrt{2}$.

Obliczamy wysokość *SO* ostrosłupa: $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{|AO|}{|SO|}=\frac{2\sqrt{2}}{|SO|}$, czyli $|SO|=\frac{2\sqrt{2}\cdot 3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Uwaga

Zdający może zauważyć, że trójkąt $ACS$ jest równoboczny i jego bok ma długość $4\sqrt{2}$, więc zastosowanie wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym pozwala obliczyć wysokość ostrosłupa: $|SO| = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$.

Obliczamy objętość $V$ ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}\cdot 16\cdot 2\sqrt{6} = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Obliczenie długości krawędzi podstawy $|AB| = a = 4$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**
Obliczenie pola $P$ podstawy: $P = 16$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie wysokości ostrosłupa $|SO| = 2\sqrt{6}$.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie objętości $V$ ostrosłupa: $V = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

## Zadanie 33. *(5 pkt)*

Trasę etapu wyścigu kolarskiego o długości 150 km pan Nowak pokonał w czasie o 1 godzinę i 50 minut krótszym niż jego kolega z drużyny, pan Kowalski. Średnia wartość prędkości, z jaką pan Nowak jechał na tym etapie, była o 11 km/h większa od średniej wartości prędkości pana Kowalskiego na tej trasie. Oblicz średnie wartości prędkości, z jakimi przejechali całą trasę obaj zawodnicy.

**Uwaga**

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych $v$, $t$ oznaczających, odpowiednio, prędkość i czas dla pana Nowaka. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

**Rozwiązanie I sposób**

Przyjmujemy oznaczenia $v$ i $t$ – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pana Nowaka.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pana Nowaka: $v\cdot t=150$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Kowalskiego: $v-11$, $t+1\frac{5}{6}$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} v\cdot t=150 \\ (v-11)\cdot\left(t+1\frac{5}{6}\right)=150 \end{cases}$.

Z pierwszego równania wyznaczamy

| $t=\frac{150}{v}$ | $v=\frac{150}{t}$ |
|---|---|
| podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy | |
| $(v-11)\cdot\left(\frac{150}{v}+1\frac{5}{6}\right)=150$<br>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2-11v-900=0$.<br>$\Delta=121+3600=61^2$<br>$v_1=\frac{11-61}{2}=-25$, sprzeczne z zał. $v>0$<br>$v_2=\frac{11+61}{2}=36\,(\text{km/h})$<br>obliczamy prędkość drugiego rowerzysty<br>$v-11=25\,(\text{km/h})$ | $\left(\frac{150}{t}-11\right)\cdot\left(t+1\frac{5}{6}\right)=150$<br>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $66t^2+121t-1650=0$.<br>$\Delta=14641+435600=671^2$<br>$t_1=\frac{-121-671}{132}=-6$, sprzeczne z zał. $t>0$<br>$t_2=\frac{-121+671}{132}=4\frac{1}{6}$ (h)<br>obliczamy prędkość pana Nowaka<br>$v=\frac{150}{4\frac{1}{6}}=36$ (km/h)<br>obliczamy prędkość drugiego rowerzysty<br>$v-11=25\,(\text{km/h})$ |
| Odp.: Prędkości rowerzystów są równe: 36 km/h i 25 km/h. | |

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

**Rozwiązanie II sposób**

Przyjmujemy oznaczenia $v$ i $t$ – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pana Kowalskiego.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pana Kowalskiego: $v \cdot t = 150$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Nowaka: $v+11$, $t-1\frac{5}{6}$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} (v+11)\cdot\left(t-1\frac{5}{6}\right)=150 \\ v\cdot t=150 \end{cases}$

Z drugiego równania wyznaczamy

| $t=\frac{150}{v}$ | $v=\frac{150}{t}$ |
|---|---|
| podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy | |
| $(v+11)\cdot\left(\frac{150}{v}-1\frac{5}{6}\right)=150$<br>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2+11v-900=0$.<br>$\Delta=121+3600=61^2$<br>$v_1=\frac{-11-61}{2}=-36$, sprzeczne z zał. $v>0$<br>$v_2=\frac{-11+61}{2}=25\,(\text{km/h})$<br>obliczamy prędkość pana Nowaka<br>$v+11=36\,(\text{km/h})$ | $\left(\frac{150}{t}+11\right)\cdot\left(t-1\frac{5}{6}\right)=150$<br>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $66t^2-121t-1650=0$.<br>$\Delta=49+3920=63^2$<br>$t_1=\frac{121-671}{132}=-4\frac{1}{6}$, sprzeczne z zał. $t>0$<br>$t_2=\frac{121+671}{132}=6\,(\text{h})$<br>obliczamy prędkość pana Kowalskiego<br>$v=\frac{150}{6}=25\,(\text{km/h})$<br>obliczamy prędkość pana Nowaka<br>$v+11=36\,(\text{km/h})$ |
| Odp.: Prędkości rowerzystów są równe: 36 km/h i 25 km/h. | |

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

- Zapisanie zależności między drogą, prędkością i czasem dla jednego z rowerzystów oraz prędkości i czasu dla obu rowerzystów przy użyciu tych samych oznaczeń,

  np.: dla pana Nowaka $v\cdot t=150$, czas pana Kowalskiego $t+1\frac{5}{6}$, prędkość pana Kowalskiego $v-11$.

  lub: dla pana Kowalskiego $v\cdot t=150$, czas pana Nowaka $t-1\frac{5}{6}$, prędkość pana Nowaka $v+11$.

**Uwaga**

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Nie wymagamy opisania oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... **2 p.**

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi $v$ i $t$ – odpowiednio z prędkością i czasem dla pana Nowaka: $\begin{cases} v\cdot t=150 \\ (v-11)\cdot\left(t+1\frac{5}{6}\right)=150 \end{cases}$.

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi $v$ i $t$ – odpowiednio z prędkością i czasem dla pana Kowalskiego: $\begin{cases} (v+11)\cdot\left(t-1\frac{5}{6}\right)=150 \\ v\cdot t=150 \end{cases}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... **3 p.**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np:

$(v-11)\cdot\left(\frac{150}{v}+1\frac{5}{6}\right)=150$ lub $\left(\frac{150}{t}-11\right)\cdot\left(t+1\frac{5}{6}\right)=150$ lub $(v+11)\cdot\left(\frac{150}{v}-1\frac{5}{6}\right)=150$

lub $\left(\frac{150}{t}+11\right)\cdot\left(t-1\frac{5}{6}\right)=150$.

**Uwaga**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... **4 p.**

- rozwiązanie równania z niewiadomą $v$ z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości drugiego rowerzysty

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą $t$ bezbłędnie i nieobliczenie prędkości rowerzystów

albo

- obliczenie $t$ z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości obu rowerzystów.

**Rozwiązanie pełne** ..... **5 p.**

Obliczenie prędkości obu rowerzystów: 36 km/h i 25 km/h.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkość tylko jednego z rowerzystów: 36 km/h lub 25 km/h, to otrzymuje **0 pkt.**
2. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkości obu rowerzystów: 36 km/h i 25 km/h, to otrzymuje **1 pkt**.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

3. Zdający może pominąć jednostki, o ile ustalił je w toku rozumowania i stosuje je konsekwentnie.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

## Zadanie 34. *(4 pkt)*

Podstawą trójkąta równoramiennego *ABC* jest bok *AB*, gdzie $A=(2,1)$ i $B=(5,2)$. Ramię tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x-y-3=0$. Oblicz współrzędne wierzchołka *C*.

**Rozwiązanie**

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej *AB*: $\frac{2-1}{5-2}=\frac{1}{3}$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej *AB* jest równy $(-3)$. Symetralna odcinka $AB$ ma równanie $y=-3x+b$. Punkt $S=\left(\frac{5+2}{2},\frac{2+1}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$ jest środkiem odcinka $AB$. Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt *S*, więc $\frac{3}{2}=-3\cdot\frac{7}{2}+b$, stąd $b=12$. Zatem symetralna odcinka *AB* ma równanie $y=-3x+12$

Obliczamy współrzędne wierzchołka *C* rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases}2x-y-3=0\\ y=-3x+12\end{cases}$$

Zatem współrzędne punktu *C* są równe: $C=(3,3)$.

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- poprawne wyznaczenie lub podanie współrzędnych środka boku *AB*: $S=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$

albo

- poprawne wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej *AB*: $a=\frac{1}{3}$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wyznaczenie równania symetralnej boku *AB*: $y=-3x+12$.

Uwaga

Zdający może wyznaczyć równanie symetralnej stosując jej własność: $|AC|=|BC|$, gdzie $C=(x,y)$ jest dowolnym punktem tej symetralnej. Wówczas otrzymuje:

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}$ stąd $3x+y-12=0$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zapisanie układu równań $\begin{cases}2x-y-3=0\\ y=-3x+12\end{cases}$ i poprawne obliczenie jednej ze współrzędnych punktu *C*.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

**Rozwiązanie prawie pełne…… 3 pkt**

- popełnienie błędów przy wyznaczaniu współrzędnych środka boku albo współczynnika kierunkowego prostej *AB* i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczenie współrzędnych punktu *C*.

albo

- poprawne wyznaczenie równania symetralnej boku *AB* i popełnienie błędów przy wyznaczeniu współrzędnych punktu *C*.

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Poprawne obliczenie współrzędnych punktu *C*: $C=(3,3)$.

**II sposób rozwiązania**

Obliczamy współrzędne wektora *AB* który jest prostopadły do symetralnej odcinka *AB*: $\vec{AB}=[3,1]$. Zatem symetralna odcinka *AB* ma równanie $3x+y-b=0$. Obliczamy współrzędne punktu *S*, który jest środkiem odcinka *AB*: $S=\left(\frac{5+2}{2},\frac{2+1}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$. Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt *S*, więc $3\cdot\frac{7}{2}+\frac{3}{2}-b=0$, stąd $b=12$. Zatem symetralna odcinka *AB* ma równanie $3x+y-12=0$.

Obliczamy współrzędne wierzchołka *C* rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases}2x-y-3=0\\3x+y-12=0\end{cases}$$

Zatem współrzędne punktu *C* są równe: $C=(3,3)$.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt**

- poprawne wyznaczenie lub podanie współrzędnych środka boku *AB*: $S=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$

albo

- poprawne obliczenie współrzędnych wektora *AB*: $\vec{AB}=[3,1]$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Wyznaczenie równania symetralnej boku *AB*: $y=-3x+12$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Zapisanie układu równań $\begin{cases}2x-y-3=0\\3x+y-12=0\end{cases}$ i poprawne obliczenie jednej ze współrzędnych punktu *C*.

**Rozwiązanie prawie pełne…… 3 pkt**

- popełnienie błędów przy wyznaczaniu współrzędnych środka boku albo współrzędnych wektora *AB* i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczenie współrzędnych punktu *C*.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

albo

- poprawne wyznaczenie równania symetralnej boku $AB$ i popełnienie błędów przy wyznaczeniu współrzędnych punktu $C$.

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Poprawne obliczenie współrzędnych punktu $C$: $C=(3,3)$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info