

MATURA ROZSZERZENIE LICZBY

ZADANIE 1 (5 PKT)

Korzystając ze wzoru

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2},$$

który jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby $x \neq 1$, wykaż, że

$$\log_5 \left(\frac{5^{2 \cdot 7} \cdot 5^{4 \cdot 7^3} \cdot 5^{6 \cdot 7^5} \cdot 5^{8 \cdot 7^7}}{5 \cdot 5^{3 \cdot 7^2} \cdot 5^{5 \cdot 7^4} \cdot 5^{7 \cdot 7^6}} \right) = \frac{8 \cdot 7^9 + 9 \cdot 7^8 - 1}{64}.$$

ZADANIE 2 (5 PKT)

Wykaż, że liczba $3^{18} - 2^{18}$ jest podzielna przez 19.

ZADANIE 3 (5 PKT)

Uzasadnij, że liczba 55 jest dzielnikiem liczby $31!$, i że liczba 37 nie jest dzielnikiem liczby $31!$.

ZADANIE 4 (5 PKT)

Niech $x \in \mathbf{C}$. Wykaż, że wyrażenie $\frac{x^2+3x+5}{x+1}$ przyjmuje wartość całkowitą tylko dla czterech wartości x . Podaj te liczby.

ZADANIE 5 (5 PKT)

Wykaż, że kwadrat liczby całkowitej dającej z dzielenia przez 3 resztę 2, przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

ZADANIE 6 (5 PKT)

Wiadomo, że liczba a jest rozwiązaniem równania $\frac{1}{x} + x = 5$, gdzie $x \neq 0$. Nie wyznaczając a , oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{a^3} + a^3$.

ZADANIE 7 (5 PKT)

Wykaż, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daje resztę 3, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5.

ZADANIE 8 (5 PKT)

Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

ZADANIE 9 (5 PKT)

Wiedząc, że liczba x jest rozwiązaniem równania $9^x + 9^{-x} = 14$, wyznaczyć wartość wyrażenia $3^x + 3^{-x}$.

ZADANIE 10 (5 PKT)

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b określamy liczby $a \circ b$ i $a * b$ w następujący sposób:

$a \circ b =$ liczba nie mniejsza spośród liczb a i b ,

$a * b =$ liczba nie większa spośród liczb a i b .

Na przykład: $7 \circ 3 = 7$, $15 \circ 15 = 15$, $7 * 3 = 3$, $(-6) * 4 = -6$, $(-3) * (-3) = -3$.

Oblicz

a) $(-5) \circ 4 =$

b) $(2005 * 2007) \circ (-2006) =$

c) $(5 \circ 6) * (2 \circ 7) =$